تمرینات سری اول ریاضی مهندسی

③ ابتدا سری فوریه تابع $f(x)=x^2$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x^2\cos\frac{n\pi x}{1}\,dx=\int_{-1}^{1}x^2\cos n\pi x\,dx=2\int_0^1\underbrace{x^2}_{u}\underbrace{\cos n\pi x\,dx}_{dv}=\frac{2}{n\pi}x^2\sin n\pi x\Big]_0^1-\frac{4}{n\pi}\int_0^1\underbrace{x}_{u}\underbrace{\sin n\pi x\,dx}_{dv}$$

$$=-\frac{4}{n\pi}\left[x\,\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1+\frac{1}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\,dx\right]=-\frac{4}{n\pi}\left[\frac{-(-1)^n}{n\pi}+\frac{1}{n\pi}\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1\right]=\frac{4\,(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

$$\Rightarrow\quad a_n=\frac{4\times(-1)^n}{(n\pi)^2}\,,\qquad n=1,2,\dots$$

$$a_0=\int_{-1}^{1}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}\Rightarrow\quad a_0=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{a_n=\begin{cases}\dfrac{2}{3} & n=0\\[2ex] \dfrac{4\times(-1)^n}{n^2\pi^2} & n=1,2,3,\dots\end{cases}}$$

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\underbrace{x^2\sin n\pi x}_{\text{تابع فرد}}\,dx=0\quad\Rightarrow\quad\boxed{b_n=0\,,\quad n=1,2,\dots}$$

$$\Rightarrow\quad\boxed{x^2=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\times(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos n\pi x}\quad\rightarrow$$

چون $f(x)=x^2$ یک تابع پیوسته در هر نقطه است پس
در هر نقطه با سری فوریه خود برابر است.

اگر در سری فوریه تابع x^2 قرار دهیم $x=0$ (چون $f(x)=x^2$ در $x=0$ پیوسته است) داریم:

$$0=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\times(-1)^n}{n^2\pi^2}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{-\pi^2}{12}\Rightarrow\quad\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}}$$

اگر در سری فوریه تابع x^2 قرار دهیم $x=1$ (چون $f(x)=x^2$ در $x=1$ پیوسته است) داریم:

$$1=\frac{1}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\times(-1)^n}{n^2\pi^2}(-1)^n\Rightarrow\quad\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

تمرینات سری اول ریاضی مهندسی

④ برای تابع $f(x)=|\sin x|$ ، $T=\pi$ و $l=\frac{T}{2}=\frac{\pi}{2}$ خواهد بود. لذا،

با استفاده از تذکر کتاب

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx \overset{\uparrow}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\sin x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\times\frac{2}{\pi}\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}(1+1)=\frac{4}{\pi}$$

برای $n=1,2,\dots$:

با استفاده از تذکر کتاب

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2nx\,|\sin x|\,dx \overset{\uparrow}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2nx\,\sin x\,dx$$

با استفاده از فرمول های مثلثاتی تبدیل جمع به ضرب:

$$\cos 2nx\,\sin x=\frac{1}{2}\left(\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right)$$

$$\Rightarrow a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\sin(2n+1)x-\sin(2n-1)x\right]dx=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)x}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)x}{2n-1}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(2n+1)\pi}{2n+1}+\frac{\cos(2n-1)\pi}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]=\frac{-4}{\pi(4n^2-1)}$$

حال برای $n=1,2,\dots$ ، b_n را محاسبه می‌کنیم:

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,\sin 2nx\,dx \overset{*}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos(2n-1)x-\cos(2n+1)x\right]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}-\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$=0$$

پس $b_n=0$ برای هر $n=1,2,\dots$. لازم به ذکر است که در تساوی ⊛ از فرمول $\sin p\,\sin q=-\frac{1}{2}\left(\cos(p+q)-\cos(p-q)\right)$ استفاده شده.

$$|\sin x| \xRightarrow{\text{سری فوریه}} \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)}$$

حال با توجه به قضیه ۱-۵ کتاب، بگیرید $x=0$. پس

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2}$$

تمرینات سری اول ریاضی مهندسی

6) $T = 1-(-1) = 2 \Rightarrow l = \frac{T}{2} = 1$

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \int_{-1}^{1} \underbrace{x(1-|x|)}_{\text{تابع فرد}}\, dx = 0 \\ a_n &= \int_{-1}^{1} \underbrace{\overbrace{x(1-|x|)}^{\text{فرد}}\ \overbrace{\cos n\pi x}^{\text{زوج}}}_{\text{فرد}}\, dx = 0 , \qquad n=1,2,\dots \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = 0 , \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} \underbrace{\overbrace{x(1-|x|)}^{\text{فرد}}\ \overbrace{\sin n\pi x}^{\text{فرد}}}_{\text{زوج}}\, dx = 2\int_{0}^{1} x(1-x)\sin n\pi x\, dx = \begin{cases} 0 & n=2m \\ \dfrac{8}{(2m+1)^3\pi^3} & n=2m+1 \end{cases}$$

در نتیجه سری فوریه تابع $f(x)=x(1-|x|)$ به صورت زیر است:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{8}{(2m+1)^3\pi^3} \sin (2m+1)\pi x$$

با استفاده از قضیه ۱-5 کتاب، قرار دهید $x=\frac{1}{2}$. پس

$$\frac{8}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{1}{2}\left(f\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^+\right) + f\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^-\right)\right) = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}}$$

7

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos ax\,dx=\frac{1}{\pi a}\sin ax\Big|_0^{2\pi}=\frac{\sin 2\pi a}{\pi a}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos ax\cos nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos(a+n)x+\cos(a-n)x\right]dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n}+\frac{\sin(a-n)x}{a-n}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin 2(a+n)\pi}{a+n}+\frac{\sin 2(a-n)\pi}{a-n}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{a\left(\sin 2(a+n)\pi+\sin 2(a-n)\pi\right)-n\left(\sin 2(a+n)\pi-\sin 2(a-n)\pi\right)}{a^2-n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2a\sin 2a\pi\,\overset{1}{\cancel{\cos 2n\pi}}-2n\,\overset{0}{\cancel{\sin 2n\pi}}\cos 2a\pi}{a^2-n^2}\right]=\frac{1}{\pi}\,\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos ax\sin nx\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\sin(a+n)x+\sin(n-a)x\right]dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos(a+n)x}{a+n}-\frac{\cos(n-a)x}{n-a}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos 2(a+n)\pi}{a+n}+\frac{\cos 2(n-a)\pi}{n-a}-\frac{1}{n+a}-\frac{1}{n-a}\right]$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{n\left(\cos 2(a+n)\pi+\cos 2(n-a)\pi\right)-a\left(\cos 2(a+n)\pi-\cos 2(n-a)\pi\right)-2n}{n^2-a^2}\right]$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\left[\frac{2n\cos 2a\pi\,\overset{1}{\cancel{\cos 2n\pi}}+2a\,\overset{0}{\cancel{\sin 2n\pi}}\sin 2a\pi-2n}{n^2-a^2}\right]=\frac{n(1-\cos 2a\pi)}{\pi(n^2-a^2)}=\frac{2n\sin^2 a\pi}{\pi(n^2-a^2)}$$

$$f(x)=\cos ax\ \xrightarrow{\text{سری فوریه تابع}}\ \frac{\sin 2\pi a}{2\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-a\sin 2\pi a}{\pi(n^2-a^2)}\cos nx+\frac{2n\sin^2 a\pi}{\pi(n^2-a^2)}\sin nx\right]$$

$$\frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{\sin 2\pi a}{2\pi a}-\frac{a\sin 2\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}$$

با توجه به اینکه ضابطه f را در بازه $[0,2\pi]$ به صورت $f(x)=\cos ax$ داده شده داریم:

$$\left.\begin{array}{l} f(0^+)=\cos 0=1 \\ f(0^-)=f(2\pi)=\cos 2\pi a \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{f(0^+)+f(0^-)}{2}=\frac{1+\cos 2\pi a}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a\sin 2\pi a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}=\frac{\sin 2\pi a}{2\pi a}-\frac{1+\cos 2\pi a}{2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-a^2}=\frac{1}{2a^2}-\frac{\pi(1+\cos 2\pi a)}{2a\sin 2\pi a}$$

تمرینات سری اول ریاضی مهندسی

(11) طبق فرمول سری فوریه سینوسی کافی است b_n $(n=1,2,\dots)$ را محاسبه کنیم:

$$b_n = \frac{2}{4}\int_0^4 \cos\frac{\pi x}{4}\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = \frac{2}{4}\times\frac{1}{2}\int_0^4\left(\sin\frac{(n+1)\pi x}{4} + \sin\frac{(n-1)\pi x}{4}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-\cos\frac{(n+1)\pi x}{4}}{\frac{(n+1)\pi}{4}}\Bigg|_0^4 + \frac{-\cos\frac{(n-1)\pi x}{4}}{\frac{(n-1)\pi}{4}}\Bigg|_0^4\right]$$

$$= -\left[\frac{(-1)^{n+1}-1}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^{n-1}-1}{(n-1)\pi}\right] = \frac{(-1)^n+1}{(n+1)\pi} + \frac{(-1)^n+1}{(n-1)\pi}$$

$$= \frac{(-1)^n+1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right] = \frac{(-1)^n+1}{\pi}\;\frac{2n}{n^2-1} = \begin{cases} \dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases}$$

چون تابع $f(x) = \cos ax$ در هر نقطه پیوسته است، پس در هر نقطه ضابطه تابع با سری فوریه تابع برابر است.

$$\xRightarrow{\text{سری فوریه سینوسی}} \quad \cos\frac{\pi x}{4} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8m}{\pi(4m^2-1)}\sin\left(\frac{m\pi x}{2}\right)$$