



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
ریاضی مهندسی

تمرین های سری پانزدهم

۱. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, |z| > 1\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z>1} = 1, \quad T|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z<-1} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{|z|=1} = 0$$

۲. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\} - \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = 0, 0 < \text{Im } z \leq 1\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z>0} = 1, \quad T|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z<0} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\text{Re } z=0, \text{Im } z<1} = 0$$

۳. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < \pi\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z>0} = 1, \quad T|_{\text{Im } z=\pi, \text{Re } z>0} = 2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z<0} = \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\text{Im } z=\pi, \text{Re } z<0} = 0$$

۴. فرض کنید $a, b > 0$ ، معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < a, 0 < \text{Re } z < b\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Im } z=0} = 1, \quad T|_{\text{Im } z=a} = 2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\text{Re } z=0} = \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\text{Re } z=b} = 0$$

۵. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, 0 < \text{Arg } z < \pi\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{|z|=1} = 1, \quad T|_{|z|=2} = 2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}\Big|_{\text{Im } z=0} = 0$$

۶. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2, 0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\theta=0} = 1, \quad T|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 2$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=1} = \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r=2} = 0$$

۷. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, 0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\theta=0} = 1, \quad T|_{r=1} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 0$$

۸. فرض کنید $a, b > 0$ ، معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Im } z < b, 0 < \text{Re } z < a\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Im } z=0} = 1, \quad T|_{\text{Re } z=a} = 2, \quad T|_{\text{Im } z=b} = 3, \quad T|_{\text{Re } z=0} = 4$$

۹. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < \text{Arg } z < \frac{\pi}{4}\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Arg } z=0} = 1, \quad T|_{\text{Arg } z=\frac{\pi}{4}} = 2$$

۱۰. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, |\text{Re } z| < \frac{\pi}{4}\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Re } z=-\frac{\pi}{4}} = 1, \quad T|_{\text{Im } z=0} = 2, \quad T|_{\text{Re } z=\frac{\pi}{4}} = 3$$

۱۱. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0, \text{Re } z > 0\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T|_{\text{Re } z=0} = 1, \quad T|_{\text{Im } z=0, \text{Re } z>1} = 2, \quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{\text{Im } z=0, 0 < \text{Re } z < 1} = 0$$

۱۲. معادله لاپلاس را روی میدان

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \text{Im } z > 0\}$$

با شرایط مرزی زیر حل کنید:

$$T_{|z|=1, \operatorname{Re} z > 0} = ۱, \quad T_{|z|=1, \operatorname{Re} z < 0} = ۲$$
$$T_{\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z < 0} = ۳, \quad T_{\operatorname{Im} z = 0, \operatorname{Re} z > 0} = ۴$$