پاسخنامه سری پنجم تمارین

درس معادلات دیفرانسیل

خرداد ۹۹

بسمه تعالی

سوال ۱ شعاع همگرایی را در هرکدام از سری های زیر بدست آورید.

- الف)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

- ب)

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$

- ج)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n}$$

- د)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n}$$

پاسخ ابتدا آزمون نسبت را برای بررسی همگرایی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ یادآوری میکنیم که این آزمون بیان میکند که اگر قرار دهیم:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

آنگاه اگر $0 \leq \rho < 1$ آنگاه سری مذکور همگراست و اگر $\rho > 1$ آنگاه سری مذکور واگراست و اگر $\rho = 1$ آنگاه با استفاده از این آزمون در مورد همگرایی سری نمیتوان تصمیم گرفت و باید از راه های دیگر همگرایی یا واگرایی بررسی شود.

- الف) در اینجا داریم $a_n = \dfrac{x^{2n}}{n!}$ و در نتیجه:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{|x|^{2n+2}}{(n+1)!}}{\dfrac{|x|^{2n}}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{n+1} = 0$$

پس مستقل از انتخاب x داریم $\rho = 0$ و در نتیجه برای هر $x \in \mathbb{R}$ سری مذکور همگرا می باشد. پس شعاع همگرایی سری ذکر شده در قسمت (الف) برابر با ∞ می باشد.

- ب) در این قسمت داریم $a_n = 2^n x^n$ و در نتیجه:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}|x|^{n+1}}{2^n|x|^n} = 2|x|$$

در نتیجه $\rho = 2|x|$. بنابراین اگر $x > \frac{1}{2}$ یا $x < -\frac{1}{2}$ آنگاه سری مذکور واگرا می شود و هر گاه $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ آنگاه سری همگرا می شود. همچنین با جایگذاری $x = \frac{1}{2}$ و $x = -\frac{1}{2}$ در سری بوضوح مشاهده می شود که سری واگرا می شود و در نتیجه سری مذکور فقط به ازای $x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ همگرا می شود و در نتیجه شعاع همگرایی برابر است با $\frac{1}{2}$

- ج) در این قسمت داریم $a_n = \frac{(x - x_0)^n}{n}$ و در نتیجه:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x - x_0|^n}{n}} = |x - x_0|$$

پس $\rho = |x - x_0|$. در نتیجه برای x هایی که $|x - x_0| > 1$ سری مذکور واگراست و برای x هایی که $|x - x_0| < 1$ سری همگراست. اگر $x - x_0 = 1$ آنگاه سری همساز را داریم که واگراست و اگر $x - x_0 = -1$ آنگاه یک سری متناوب داریم که با توجه به اینکه جمله عمومی آن در بینهایت به سمت صفر میل میکند بنا بر آزمون لایبنیتز یک سری همگرا داریم. پس سری مذکور فقط به ازای $x \in [x_0 - 1, x_0 + 1)$ همگراست. پس شعاع همگرایی سری مذکور عبارت است از ۱

- د) در این قسمت داریم $a_n = \frac{x^n n!}{n^n}$ و در نتیجه:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{|x|^n n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n |x|$$

اما:

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{n}{n+1})^n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{1}{e}$$

در نتیجه $\rho = \frac{|x|}{e}$. پس هرگاه $x > e$ یا $x < -e$ آنگاه سری مذکور واگراست و هرگاه $-e < x < e$ آنگاه سری همگرا می باشد. پس سری مذکور برای $x \in (-e, e)$ همگرا می باشد و البته می توان همگرایی یا واگرایی سری مذکور را در نقاط $x = \pm e$ نیز بررسی نمود. خلاصه آنکه نتیجه میشود که شعاع همگرایی سری برابر است با e

در صورتی که مشتاق بررسی همگرایی سری در $x = e$ می باشید .ابتدا لازم است که فرمول استرلینگ را بیان کنیم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\frac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

از این رابطه نتیجه می شود:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^n n!}{n^n\sqrt{2\pi n}} = 1$$

یا به عبارت دیگر:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^n n!}{n^n}}{\sqrt{2\pi n}} = 1$$

رابطه فوق نتیجه می دهد که $\frac{e^n n!}{n^n}$ نمیتواند یک دنباله کراندار باشد و بخصوص نتیجه میگیریم که سری مذکور به ازای $x = \pm e$ واگرا می باشد. پس سری فقط و فقط به ازای $x \in (-e, e)$ همگرا می باشد.

سوال ۲ بسط تیلور توابع زیر را حول x_0 بدست آورده و شعاع همگرایی را بدست آورید.

- الف)

$$\ln(1+x) \quad , \quad x_0 = 0$$

- ب)

$$\frac{1}{1-x} \quad , \quad x_0 = 2$$

پاسخ

- الف) برای تابع $f(x) = \ln(1+x)$ داریم $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ و $f''(0) = -1$ و بطور کلی برای $n \geq 1$ داریم:

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

و در نتیجه بسط تیلور f حول صفر عبارت می شود از:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

داریم $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ و در نتیجه:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{n+1}}{\frac{|x|^n}{n}} = |x|$$

در نتیجه $\rho = |x|$ و بنابراین هرگاه $x > 1$ یا $x < -1$ آنگاه سری واگرا می شود و هرگاه $-1 < x < 1$ آنگاه سری همگرا می شود. به ازای $x = 1$ یک سری متناوب داریم که بنابر آزمون لایبنیتز همگرا می باشد و به ازای $x = -1$ سری همساز را داریم که واگرا می باشد. پس سری تیلور فوق فقط به ازای مقادیر $x \in (-1, 1]$ همگرا می باشد و در نتیجه شعاع همگرایی برابر می شود با ۱

• ب) میتوان نوشت:

$$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{-1-(x-2)}=-\frac{1}{1+(x-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-2)^n$$

و در نتیجه بسط تیلور آن حول $x_0=2$ عبارت است از:

$$\frac{1}{1-x}\approx\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(x-2)^n$$

و از آنجایی که سری فوق یک سری هندسی می باشد این سری فقط به ازای مقادیری مانند x که $-1<x-2<1$ همگرا می باشد. پس سری فقط به ازای x هایی که $1<x<3$ همگرا می باشد و همچنین شعاع همگرایی نیز برابر می شود با ۱

سوال ۳ با استفاده از سری های توانی جواب هرکدام از معادلات زیر را حول x_0 بدست آورید (با بدست آوردن y_1, y_2 این کار را انجام دهید) سپس با استفاده از رونسکین y_1, y_2 مستقل بودن دو جواب را بررسی کنید.

• الف)

$$y''-y=0 \quad , \quad x_0=0$$

• ب)

$$y''-k^2x^2y=0 \quad , \quad x_0=0$$

که در آن k عددی ثابت است.

• پ)

$$(2+x^2)y''-xy'+4y=0 \quad , \quad x_0=0$$

• ج)

$$y''-xy'+2y=0 \quad , \quad x_0=0$$

• د)

$$xy''+y'+xy=0 \quad , \quad x_0=1$$

پاسخ در این سوال میبینیم که تمامی نقاط داده شده نقاط معمولی معادله های دیفرانسیل متناظر می باشند. یعنی ضریب y'' در این معادلات به ازای x_0 های متناظر ناصفر می باشد. پس تنها کاری که باید انجام دهیم آن است که با فرض آنکه جواب

بصورت:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$$

می باشد (که بنابر قضایا چون با نقاط معمولی سر و کار داریم جواب ها واقعا بدین شکل نوشته می شوند) دنباله a_n را بدست آوریم (از طریق جایگذاری این صورت جواب در معادله دیفرانسیل متناظر).

- الف) فرض کنید:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

جوابی از معادله باشد که در شرط اولیه $y_1(0)=1$ و $y_1'(0)=0$ و همچنین فرض کنید:

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$$

جوابی باشد که در شرط اولیه $y_2(0)=0$ و $y_2'(0)=1$ صدق کند. از شرایط اولیه بوضوح نتیجه می شود که $a_0=1$ و $a_1=0$. با جایگذاری در معادله دیفرانسیل داده شده رابطه زیر حاصل می شود:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv 0$$

در سمت چپ تساوی جمله ثابت عبارت است از $2a_2-a_0$ و در نتیجه $a_2=\frac{1}{2}$. ضریب x در عبارت سمت چپ عبارت است از $6a_3-a_1$ و در نتیجه $a_3=0$. برای $k\geq 2$ ضریب x^k در سری سمت چپ از طریق رابطه زیر حاصل می شود:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}-a_k$$

و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$a_{k+2}=\frac{a_k}{(k+2)(k+1)}$$

از آنجایی که $a_1=a_3=0$ نتیجه می شود که برای هر عدد صحیح و نامنفی k داریم $a_{2k+1}=0$ و همچنین با استفاده از استقرا می توان نتیجه گرفت که برای هر عدد طبیعی k:

$$a_{2k}=\frac{1}{(2k)!}$$

و در نتیجه:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\cosh(x)$$

بطور مشابه نیز برای b_n رابطه:

$$b_{k+2} = \frac{b_k}{(k+2)(k+1)}$$

حاصل می شود که از آنجایی که $b_0 = 0$ و $b_1 = 1$ نتیجه می شود که برای هر عدد صحیح و نامنفی k رابطه $b_{2k} = 0$ برقرار است و برای هر عدد صحیح و نامنفی k با استقرا داریم:

$$b_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}$$

در نتیجه:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh(x)$$

- ب) فرض کنید شکل جواب ها و شروط اولیه جواب ها همانند آنچه باشد که در قسمت (الف) مطرح شد. در نتیجه روابط زیر را داریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} k^2 a_n x^{n+2} \equiv 0$$
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} k^2 b_n x^{n+2} \equiv 0$$

با استفاده از شروط اولیه خواهیم داشت $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ و $b_0 = 0$ و $b_1 = 1$. در اولین تساوی در سمت چپ جمله ثابت عبارت است از $2a_2$ و ضریب جمله x نیز عبارت است از $6a_3$. در نتیجه $a_2 = a_3 = 0$. بطور مشابه با در نظر گرفتن جمله ثابت و ضریب x در طرف چپ تساوی دوم نتیجه می شود که $b_2 = b_3 = 0$. برای $m \geq 2$ ضریب x^m در طرف چپ تساوی های اول و دوم به ترتیب عبارت می شوند از:

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} - k^2 a_{m-2}$$

$$(m+2)(m+1)b_{m+2} - k^2 b_{m-2}$$

و در نتیجه برای $m \geq 2$ تساوی های زیر برقرار هستند:

$$(m+2)(m+1)a_{m+2} = k^2 a_{m-2}$$

$$(m+2)(m+1)b_{m+2} = k^2 b_{m-2}$$

پس میتوان اطلاعات زیر را در مورد دنباله های a_n, b_n مشاهده کرد:

$$a_4 = \frac{k^2}{4 \times 3} \quad , \quad a_5, a_6, a_7 = 0 \quad , \quad a_8 = \frac{k^4}{8 \times 7 \times 4 \times 3}, \ldots$$

$$b_4 = 0 \quad , \quad b_5 = \frac{k^2}{5 \times 4} \quad , \quad b_6, b_7, b_8 = 0 \quad , \quad b_9 = \frac{k^4}{9 \times 8 \times 5 \times 4}, \dots$$

با استفاده از مشاهدات بالا می توان نتیجه گرفت که برای هر عدد i که مضربی از ۴ نباشد داریم $a_i = 0$ و برای هر عدد طبیعی m داریم:

$$a_{4m} = \frac{k^{2m}}{(4m) \times (4m-1) \times (4(m-1)) \times (4(m-1)-1) \times \dots \times 8 \times 7 \times 4 \times 3}$$

بطور مشابه می توان نتیجه گرفت که هرگاه i عددی بصورت $4j+1$ نباشد آنگاه $a_i = 0$ و برای هر عدد طبیعی m داریم:

$$b_{4m+1} = \frac{k^{2m}}{(4m+1) \times (4m) \times (4(m-1)+1) \times (4(m-1)) \times \dots \times 9 \times 8 \times 5 \times 4}$$

بنابراین جواب های y_1, y_2 از معادله مذکور برابر می شوند با:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(4n) \times (4n-1) \times (4(n-1)) \times (4(n-1)-1) \times \dots \times 4 \times 3} x^{4n}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^{2n}}{(4n+1) \times (4n) \times (4(n-1)+1) \times (4(n-1)) \times \dots \times 5 \times 4} x^{4n+1}$$

- پ) باز هم فرض کنید شکل جواب ها و شروط اولیه همانند قسمت (الف) باشد. پس با جایگذاری به روابط زیر می رسیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n \equiv 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2n(n-1)b_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 4b_n x^n \equiv 0$$

همچنین از شروط اولیه نتیجه می شود که $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ و $b_0 = 0$ و $b_1 = 1$. در سمت چپ اولین تساوی جمله ثابت عبارت است از $4a_2 + 4a_0$ و در نتیجه $a_2 = -1$. به طور مشابه داریم $b_2 = 0$. ضریب x در سمت چپ تساوی اول عبارت است از $12a_3 - a_1 + 4a_1$ و در نتیجه $a_3 = 0$. به طور مشابه داریم $b_3 = -\frac{1}{4}$. اکنون برای $k \geq 2$ ضریب x^k در طرف چپ دو تساوی به ترتیب عبارتند از:

$$2(k+2)(k+1)a_{k+2} + k(k-1)a_k - k a_k + 4a_k$$

$$2(k+2)(k+1)b_{k+2} + k(k-1)b_k - k b_k + 4b_k$$

و در نتیجه برای $k \geq 2$ روابط زیر را داریم:

$$a_{k+2} = -\frac{k^2 - 2k + 4}{2(k+2)(k+1)} a_k$$

$$b_{k+2} = -\frac{k^2 - 2k + 4}{2(k+2)(k+1)} b_k$$

در نتیجه برای هر عدد صحیح و نامنفی m داریم $a_{2m+1} = 0$ و برای هر عدد طبیعی k با استفاده از استقرا داریم:

$$a_{2k} = (-1)^k \frac{2^k((k-1)^2 - (k-1) + 1)((k-2)^2 - (k-2) + 1)...((k-k)^2 - (k-k) + 1)}{(2k)!}$$

همچنین برای هر عدد صحیح و نامنفی m داریم $b_{2m} = 0$ و برای هر عدد طبیعی k داریم:

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{((2k-1)^2 - 2(2k-1) + 4)((2k-3)^2 - 2(2k-3) + 4)...(3)}{2^k(2k+1)!}$$

در نتیجه جواب های y_1, y_2 برای معادله مذکور عبارتند از:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n((n-1)^2 - (n-1) + 1)...((n-n)^2 - (n-n) + 1)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{((2n-1)^2 - 2(2n-1) + 4)((2n-3)^2 - 2(2n-3) + 4)...(3)}{2^n(2n+1)!} x^{2n+1}$$

- ج) با در نظر گرفتن مفروضات سوالات قبل با جایگذاری به روابط زیر می رسیم:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \equiv 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)b_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2b_n x^n \equiv 0$$

و همچنین $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$ و $b_0 = 0$ و $b_1 = 1$. در سمت راست اولین تساوی جمله ثابت عبارت است از $2a_2 + 2a_0$

و در نتیجه $a_2 = -1$. بطور مشابه $b_2 = 0$. برای $k \geq 1$ ضریب x^k در طرف چپ تساوی های فوق برابر است با:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k a_k + 2a_k$$

$$(k+2)(k+1)b_{k+2} - k b_k + 2b_k$$

پس برای $k \geq 1$ تساوی های زیر را داریم:

$$a_{k+2} = \frac{k-2}{(k+2)(k+1)} a_k$$

$$b_{k+2} = \frac{k-2}{(k+2)(k+1)} b_k$$

در نتیجه برای اندیس های فرد i داریم $a_i = 0$ و برای اندیس های زوج j داریم $b_j = 0$. همچنین بوضوح $a_4 = 0$

و در نتیجه $a_6 = a_8 = ... = 0$. در نتیجه:

$$y_1(x) = 1 - x^2$$

برای b_j ها نیز اطلاعات زیر را داریم:

$$b_۳ = \frac{-۱}{۳!} \quad , \quad b_۵ = \frac{-۱}{۵!} \quad , \quad b_۷ = \frac{-۳}{۷!} \quad , \quad ....$$

و در نتیجه با استفاده از استقرا می توان نوشت:

$$b_{۲m+۱} = -\frac{(۲m-۳)(۲m-۵)...(۲m-(۲m-۱))}{(۲m+۱)!}$$

بنابراین:

$$y_۲(x) = x - \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(۲n-۳)(۲n-۵)...(۲n-(۲n-۱))}{(۲n+۱)!} x^{۲n+۱}$$

- د) فرض کنید:

$$y_۱(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n (x-۱)^n$$
$$y_۱(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n (x-۱)^n$$

جواب هایی از معادله مذکور با شرایط $a_۰ = ۱$ و $a_۱ = ۰$ و $b_۰ = ۰$ و $b_۱ = ۱$ باشند. با جایگذاری داریم:

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^{n-۱} + \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)a_n(x-۱)^{n-۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} na_n(x-۱)^{n-۱}$$
$$+\sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^{n+۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} a_n(x-۱)^n \equiv ۰$$

$$\sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)b_n(x-۱)^{n-۱} + \sum_{n=۲}^{\infty} n(n-۱)b_n(x-۱)^{n-۲} + \sum_{n=۱}^{\infty} nb_n(x-۱)^{n-۱}$$
$$+\sum_{n=۰}^{\infty} b_n(x-۱)^{n+۱} + \sum_{n=۰}^{\infty} b_n(x-۱)^n \equiv ۰$$

جمله ثابت در طرف چپ اولین تساوی عبارت است از $۲a_۲ + a_۱ + a_۰$ و در نتیجه $a_۲ = -\frac{۱}{۲}$. بطور مشابه $b_۲ = -\frac{۱}{۲}$. برای $k \geq ۱$ ضریب $(x-۱)^k$ در طرف چپ دو تساوی بالا برابر می شود با:

$$k(k+۱)a_{k+۱} + (k+۲)(k+۱)a_{k+۲} + (k+۱)a_{k+۱} + a_{k-۱} + a_k$$

$$k(k+۱)b_{k+۱} + (k+۲)(k+۱)b_{k+۲} + (k+۱)b_{k+۱} + b_{k-۱} + b_k$$

در نتیجه برای $k \geq ۱$ روابط زیر برقرار می باشد:

$$(k+۲)(k+۱)a_{k+۲} + (k+۱)^۲a_{k+۱} + a_k + a_{k-۱} = ۰$$

$$(k+۲)(k+۱)b_{k+۲} + (k+۱)^۲b_{k+۱} + b_k + b_{k-۱} = ۰$$

به عنوان مثال داریم:

$$a_3=\frac{1}{6}\quad,\quad a_4=-\frac{1}{12}\quad,\quad a_5=\frac{1}{12}\quad,\quad a_6=-\frac{13}{180}\quad,\quad \dots$$

$$b_3=\frac{1}{6}\quad,\quad b_4=-\frac{1}{6}\quad,\quad b_5=\frac{3}{20}\quad,\quad b_6=-\frac{1}{8}\quad,\quad \dots$$

در نتیجه جواب های معادله مذکور با شروط اولیه بیان شده برابر هستند با:

$$y_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^2=1-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{12}(x-1)^4+\frac{1}{12}(x-1)^5-\frac{13}{180}(x-1)^6+\dots$$

$$y_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-1)^n=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{6}(x-1)^3-\frac{1}{6}(x-1)^4+\frac{3}{20}(x-1)^5-\frac{1}{8}(x-1)^6+\dots$$

سوال ۴ با استفاده از سری ها جواب خصوصی مسئله مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

$$(1-x)y''+xy'-y=0\quad,\quad y(0)=-3\quad,\quad y'(0)=2$$

پاسخ فرض کنید مسئله مقدار اولیه فوق دارای جواب:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

باشد. پس $y(0)=a_0$ و $y'(0)=a_1$. در نتیجه $a_0=-3$ و $a_1=2$. داریم:

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\quad,\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

با جایگذاری بدست می آوریم:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\equiv 0$$

اکنون در سری ایجاد شده در سمت چپ باید دنباله a_n به گونه ای تعیین شود که ضریب هرکدام از x^k ها برابر با صفر باشد. در سمت چپ جمله ثابت عبارت است از $2a_2+3$ و در نتیجه $a_2=-\frac{3}{2}$. بطور کلی با تثبیت نمودن یک عدد طبیعی k دیده می شود که ضریب x^k در سمت چپ عبارت می شود از:

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}-k(k+1)a_{k+1}+(k-1)a_k$$

و در نتیجه باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}-k(k+1)a_{k+1}+(k-1)a_k=0$$

پس به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$a_0 = -3 \quad , \quad a_1 = 2 \quad , \quad a_2 = -\frac{3}{2} \quad , \quad a_3 = -\frac{1}{2} \quad , \quad a_4 = -\frac{1}{8} \quad , \quad a_5 = -\frac{1}{40}$$

با استفاده از اطلاعات بالا و استقرا میتوان نتیجه گرفت که برای $n \geq 2$ داریم:

$$a_n = -\frac{3}{n!}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$y(x) = -3 + 2x - 3\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = -3 + 2x - 3(e^x - 1 - x) = 5x - 3e^x$$

پس جواب مسئله مقدار اولیه داده شده عبارت می شود از:

$$y(x) = 5x - 3e^x$$

سوال ۵ در هر کدام از مسائل زیر شعاع همگرایی سری وابسته به جواب حول x_0 را بدست آورید.

- الف)

$$y'' + 4y' + 6xy = 0 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 4$$

- ب)

$$(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0 \quad , \quad x_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 2$$

پاسخ برای حل این سوال گزاره زیر را یادآوری می کنیم:

فرض کنید x_0 یک نقطه معمولی معادله:

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

باشد و قرار دهید $p = \frac{Q}{P}$ و $q = \frac{R}{P}$. فرض کنید p, q در x_0 تحلیلی باشند. در این صورت هر جواب از معادله مذکور را می توان حول x_0 بصورت یک سری توانی نوشت. بعلاوه فرض کنید شعاع همگرایی یک جواب برابر با r بوده و فرض کنید شعاع همگرایی سری های توانی مربوط به p, q حول x_0 به ترتیب برابر با r_p, r_q باشد. در اینصورت رابطه زیر را داریم:

$$r \geq \min\{r_p, r_q\}$$

اکنون به حل سوالات می پردازیم.

- (الف) نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 4$ هر دو نقاط معمولی معادله:

$$y'' + 4y' + 6xy = 0$$

هستند. بعلاوه برای این معادله داریم $p = 4$ و $q = 6x$ که بوضوح تحلیلی و برای همه مقادیر x تعریف شده اند. پس داریم $r_p = r_q = \infty$ و بنابر گزاره ای که یادآوری کردیم نتیجه می شود که $r = \infty$. در نتیجه هر جواب معادله مذکور را میتوان حول نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 4$ (یا حول هر نقطه دلخواه دیگر) بصورت سری توانی نوشت که این سری توانی برای تمام مقادیر x همگرا می باشد.

- ب) نقاط $x_0 = 0$ و $x_0 = 2$ هر دو نقاط معمولی معادله:

$$(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0$$

می باشند و $p = \dfrac{4x}{1 + x^3}$ و $q = \dfrac{1}{1 + x^3}$. ابتدا حول نقطه $x_0 = 0$ جواب ها را بررسی میکنیم. سری های توانی p, q را حول $x_0 = 0$ حساب میکنیم:

$$q = \frac{1}{1 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$$

که از آنجایی که سری فوق یک سری هندسی می باشد نتیجه میگیریم که سری فوق به ازای $x \in (-1, 1)$ همگراست و در نتیجه $r_q = 1$. همچنین:

$$p = \frac{4x}{1 + x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} 4(-1)^n x^{3n+1}$$

و در نتیجه سری اخیر نیز به ازای $x \in (-1, 1)$ همگراست و در نتیجه $r_p = 1$. پس طبق گزاره بیان شده نتیجه میشود که $r \geq 1$ و در نتیجه هر جواب معادله دیفرانسیل مذکور که بصورت سری توانی حول نقطه $x_0 = 0$ نوشته شده باشد به ازای $x \in (-1, 1)$ همگرا می باشد (البته ممکن است که بازه همگرایی بزرگتر نیز باشد ولی حداقل می دانیم که در بازه ذکر شده سری همگرا می باشد).

اکنون در نقطه $x_0 = 2$ سری های توانی p, q را بررسی میکنیم. ابتدا با قرار دادن $z = x - 2$ داریم:

$$q = \frac{1}{1 + x^3} = \frac{1}{1 + (x - 2 + 2)^3} = \frac{1}{9 + 12(x - 2) + 6(x - 2)^2 + (x - 2)^3} = \frac{1}{9 + 12z + 6z^2 + z^3}$$

در نتیجه:

$$q = \frac{1}{(z + 3)(z^2 + 3z + 3)} = \frac{1}{3}\frac{1}{z + 3} - \frac{1}{3}\frac{z}{z^2 + 3z + 3}$$

اما:

$$\frac{1}{z + 3} = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{3}\right)^n$$

و سری فوق به ازای z هایی که $|z| < ۳$ همگرا می باشد. همچنین ریشه های معادله درجه دوم:

$$z^۲ + ۳z + ۳ = ۰$$

عبارتند از $\alpha, \bar{\alpha} = \frac{-۳ \pm \sqrt{۳}i}{۲}$. در نتیجه $|\alpha| = |\bar{\alpha}| = \sqrt{۳}$ و:

$$\frac{z}{z^۲ + ۳z + ۳} = \frac{z}{(z-\alpha)(z-\bar{\alpha})} = \frac{z}{\alpha - \bar{\alpha}}(\frac{۱}{z-\alpha} - \frac{۱}{z-\bar{\alpha}})$$

اما داریم:

$$\frac{۱}{z-\alpha} = -\frac{۱}{\alpha}\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{z}{\alpha})^n$$

$$\frac{۱}{z-\bar{\alpha}} = -\frac{۱}{\bar{\alpha}}\sum_{n=۰}^{\infty}(\frac{z}{\bar{\alpha}})^n$$

و از آنجایی که دو سری فوق سری های هندسی هستند نتیجه می شود که هر دو سری بالا به ازای $|z| < |\alpha| = \sqrt{۳}$ همگرا هستند. نتیجه آنکه $\frac{z}{z^۲ + ۳z + ۳}$ را می توان بصورت یک سری توانی حول نقطه صفر نوشت بطوریکه این سری توانی به ازای z هایی که $|z| < \sqrt{۳}$ همگرا می باشد. در نتیجه:

$$\frac{۱}{۹ + ۱۲z + ۶z^۲ + z^۳}$$

دارای سری توانی حول صفر می باشد که این سری توانی به ازای $|z| < \min\{۳, \sqrt{۳}\} = \sqrt{۳}$ همگرا می باشد. بنابراین q حول $x_۰ = ۲$ دارای سری توانی می باشد که این سری توانی به ازای x هایی که $|x - ۲| < \sqrt{۳}$ همگرا می باشد. بطور مشابه سری توانی p حول $x_۰ = ۲$ به ازای x هایی که $|x - ۲| < \sqrt{۳}$ همگرا می باشد. پس $r_p = r_q = \sqrt{۳}$ و بنابر گزاره بیان شده داریم $r \geq \sqrt{۳}$. پس هر جواب معادله مذکور را میتوان حول نقطه $x_۰ = ۲$ بصورت یک سری توانی نوشت و مطمئن هستیم که این سری برای مقادیر $۲ - \sqrt{۳} < x < ۲ + \sqrt{۳}$ همگرا می باشد.

$\boxed{\textbf{سوال ۶}}$ برای معادله دیفرانسیل:

$$(۱ - x^۲)y'' - ۲xy' + \alpha(\alpha + ۱)y = ۰$$

که α عددی ثابت است دو جواب مستقل خطی بیابید. سپس نشان دهید اگر α عددی صحیح مانند n باشد آنگاه این معادله دیفرانسیل دارای جوابی بصورت یک چند جمله ای از درجه n خواهد بود.

$\boxed{\textbf{پاسخ}}$ فرض کنید که می خواهیم جواب ها را بصورت سری حول نقطه $x = ۰$ بنویسیم. فرض کنید:

$$y_۱(x) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$$

جوابی باشد که در شرط اولیه $y_1(0) = 1, y_1'(0) = 0$ صدق کند و همچنین فرض کنید:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

جوابی باشد که در شرط اولیه $y_2(0) = 0, y_2'(0) = 1$ صدق کند. ابتدا دنباله a_n را بدست می آوریم. از شروط اولیه بوضوح پیداست که $a_0 = 1$ و $a_1 = 0$. همچنین:

$$y_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad , \quad y_1''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

و با جایگذاری رابطه زیر حاصل می شود:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(\alpha+1)a_n x^n \equiv 0$$

جمله ثابت در سری سمت چپ برابر می شود با $2a_2 + \alpha(\alpha+1)$ و بنابر این داریم $a_2 = -\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}$. به ازای عدد طبیعی $k \geq 2$ ضریب x^k در سری سمت چپ عبارت است از:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \alpha(\alpha+1)a_k$$

و در نتیجه باید رابطه زیر برای هر $k \geq 2$ برقرار باشد:

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} = (k+\alpha+1)(k-\alpha)a_k$$

پس برای هر عدد صحیح و نامنفی k داریم $a_{2k+1} = 0$. همچنین برای هر عدد طبیعی m با استفاده از استقرا نتیجه می شود:

$$a_{2m} = \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2m-1)(-\alpha)(2-\alpha)...(2m-2-\alpha)}{(2m)!}$$

بطور مشابه برای دنباله b_n رابطه:

$$(k+2)(k+1)b_{k+2} = (k+\alpha+1)(k-\alpha)b_k$$

حاصل می شود که با توجه به اینکه $b_0 = 0$ و $b_1 = 1$ نتیجه می شود که برای هر عدد صحیح نامنفی k داریم $b_{2k} = 0$ و برای هر عدد طبیعی s داریم:

$$b_{2s+1} = \frac{(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2s)(1-\alpha)(3-\alpha)...(2s-1-\alpha)}{(2s+1)!}$$

پس جواب های y_1, y_2 از طریق روابط زیر حاصل می شوند:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+1)(\alpha+3)...(\alpha+2n-1)(-\alpha)(2-\alpha)...(2n-2-\alpha)}{(2n)!} x^{2n}$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha+2)(\alpha+4)...(\alpha+2n)(1-\alpha)(3-\alpha)...(2n-1-\alpha)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

می دانیم که دو جواب از یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دو یا دارای رونسکین همه جا صفر می باشند یا دارای رونسکین هیچ جا صفر. اما برای این جواب های y_1, y_2 داریم:

$$y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1$$

پس رونسکین y_1, y_2 هیچ جا صفر نمی شود و در نتیجه y_1, y_2 مستقل خطی بوده و بنابراین یک دستگاه اساسی از جواب های معادله مذکور تشکیل می دهند. اگر $\alpha = 2j$ عددی زوج باشد آنگاه طبق فرمول a_n بوضوح مشخص است که :

$$a_{2j+2} = a_{2j+4} = a_{2j+6} = ... = 0$$

و در نتیجه y_1 یک چند جمله ای از درجه $2j$ می گردد. اگر $\alpha = 2j + 1$ عددی فرد باشد نیز با استفاده از فرمول b_n داریم:

$$b_{2j+3} = b_{2j+5} = b_{2j+7} = ... = 0$$

و در این حالت نتیجه می شود که y_2 یک چند جمله ای از درجه $2j + 1$ می باشد. در حالتی که α عددی صحیح نباشد با محاسبه ای آسان با استفاده از آزمون نسبت می توان نتیجه گرفت که دو سری y_1, y_2 به ازای $x \in (-1, 1)$ (و شاید احتمالا به ازای نقاط $x = \pm 1$) همگرا می باشند و در این حالت شعاع همگرایی جواب ها برابر می شود با ۱

$\boxed{\textbf{سوال ۷}}$ در مسائل زیر نشان دهید مبدا یک نقطه منفرد منظم است سپس در حول این نقطه جواب عمومی را با استفاده از روش سری ها بدست آورید.

- الف)

$$3x^2y'' - xy' + y = 0$$

- ب)

$$2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$$

- ج)

$$x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0$$

- د)

$$x^2y'' + (x^2 + 2x)xy' - 2xy = 0$$

پاسخ یادآوری میکنیم که در معادلات مرتبه دوم به شکل:

$$\mathrm{P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0}$$

نقطه x_0 را منفرد می نامیم هرگاه $P(x_0) = 0$. این نقطه را منظم می نامیم هرگاه هر دو حد زیر موجود و متناهی باشند:

$$\lim_{x\to x_0}(x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} \quad , \quad \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

فرض کنید در معادله داده شده نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد منظم باشد. آنگاه برای بدست آوردن جواب معادله بصورت سری حول نقطه صفر فرض میکنیم جواب بصورت زیر باشد:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

که در آن r عددی حقیقی و ثابت است. با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مذکور سعی میکنیم r و دنباله a_n را بیابیم (در واقع فرآیند یافتن r به یافتن ریشه های معادله مشخصه می انجامد). حالت های مهمی که در این فرآیند رخ می دهند (تمام ریشه های معادله مشخصه مختلط و غیر حقیقی باشند یا معادله مشخصه ریشه تکراری داشته باشد یا اختلاف دو ریشه معادله مشخصه در یک عدد صحیح باشد) در حل مسائل مورد بررسی قرار می گیرند.

- الف) در این معادله داریم $P(x) = 3x^2$ و $Q(x) = -x$ و $R(x) = 1$. در نتیجه نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه تکین معادله بوده و از آنجایی که:

$$\lim_{x\to 0} x\frac{-x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$
$$\lim_{x\to 0} x^2\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

نتیجه می شود که $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد منظم معادله مذکور می باشد.

فرض کنید جواب این معادله بصورت:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

نوشته شده باشد. با جایگذاری خواهیم داشت:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \equiv 0$$

به ازای $n = 0$ ضریب x^r عبارت می شود از:

$$3r(r-1)a_0 - ra_0 + a_0$$

و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$a_0(3r^2 - 4r + 1) = 0 \Rightarrow 3r^2 - 4r + 1 = 0$$

ریشه های معادله مشخصه بالا عبارتند از $r_1 = 1$ و $r_2 = \frac{1}{3}$. پس ریشه های معادله مشخصه حقیقی و متمایز هستند و از آنجایی که $r_1 - r_2 = \frac{2}{3}$ نتیجه میگیریم که اختلاف دو ریشه عددی صحیح نمی شود. در نتیجه فرم جواب های اساسی بصورت سری در مجاورت نقطه صفر به شکل:

$$y_1(x) = |x| \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y_2(x) = |x|^{1/3} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

خواهند بود. با جایگذاری y_1 در معادله به اتحاد زیر می رسیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3n(n+1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \equiv 0$$

به ازای $k \geq 2$ ضریب x^k در سمت چپ رابطه فوق عبارت است از:

$$3k(k-1)a_{k-1} - ka_{k-1} + a_{k-1}$$

و در نتیجه:

$$(3k^2 - 4k + 1)a_{k-1} = 0$$

و از آنجایی که برای $k \geq 2$ داریم $3k^2 - 4k + 1 \neq 0$ نتیجه می گیریم که برای $m \geq 1$ داریم $a_m = 0$ و در نتیجه:

$$y_1(x) = a_0 x$$

به طریق مشابه با جایگذاری y_2 در معادله بدست می آوریم:

$$y_2(x) = b_0 x^{1/3}$$

در نتیجه جواب عمومی معادله مذکور عبارت می شود از:

$$y(x) = c_1|x| + c_2|x|^{1/3}$$

معادله ای که در این سوال آن را بررسی کردیم حالتی از معادله کشی اویلر می باشد که فرم کلی آن بصورت زیر می باشد:

$$\alpha x^2 y'' + \beta x y' + \gamma y = 0$$

که α, β, γ اعدادی ثابت هستند و $\alpha \neq 0$. به چنین معادلاتی معادله مشخصه زیر که یک معادله درجه دوم می باشد نسبت داده می شود:

$$\alpha r(r-1) + \beta r + \gamma = 0$$

اکنون برای رده بندی جواب های معادله کشی اویلر سه حالت زیر را داریم:

اگر ریشه های معادله مشخصه حقیقی و متمایز باشند مثلا r_1, r_2 آنگاه صورت کلی جواب های معادله کشی اویلر بصورت:

$$y(x) = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2}$$

می باشد.

هر گاه معادله مشخصه یک ریشه تکراری (حقیقی) مانند r داشته باشد آنگاه صورت کلی جواب ها بصورت:

$$y(x) = c_1|x|^r + c_2|x|^r \ln|x|$$

می باشد.

اگر $r = \lambda + \delta i$ ریشه های مختلط محض (غیر حقیقی) معادله مشخصه باشند آنگاه صورت کلی جواب ها عبارت است از:

$$y(x) = c_1|x|^\lambda \cos(\delta \ln|x|) + c_2|x|^\lambda \sin(\delta \ln|x|)$$

- ب) در این معادله داریم $P(x) = 2x^2$ و $Q(x) = 7x(x+1)$ و $R(x) = -3$ و در نتیجه نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد معادله است و از آنجایی که:

$$\lim_{x \to 0} x \frac{7x(x+1)}{2x^2} = \frac{7}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{-3}{2x^2} = -\frac{3}{2}$$

نتیجه می شود که نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد منظم می باشد.

فرض کنید جواب معادله بصورت سری حول نقطه صفر به شکل:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

باشد. با جایگذاری داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 7(r+n)a_n x^{r+n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 7(r+n)a_n x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{r+n} \equiv 0$$

اکنون ضریب x^r در عبارت فوق برابر می شود با $2r(r-1)a_0 + 7ra_0 - 3a_0$ و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$(2r^2+5r-3)a_0 = 0 \Rightarrow 2r^2+5r-3 = 0$$

ریشه های معادله مشخصه بالا عبارتند از $r_1 = -3$ و $r_2 = \frac{1}{2}$ و در نتیجه معادله مشخصه دو ریشه حقیقی و متمایز دارد و اختلاف آنها عددی صحیح نمی باشد. در نتیجه فرم جواب های اساسی معادله مذکور بصورت سری حول نقطه صفر بصورت زیر می باشند:

$$y_1(x) = |x|^{-3}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$
$$y_2(x) = |x|^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

اکنون با جایگذاری y_1 در معادله داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n-3)(n-4)a_n x^{n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} 7(n-3)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} 7(n-3)a_n x^{n-3} - \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{n-3} \equiv 0$$

برای $k \geq -2$ ضریب x^k در سمت چپ رابطه فوق عبارت است از:

$$2k(k-1)a_{k+3} + 7(k-1)a_{k+2} + 7ka_{k+3} - 3a_{k+3}$$

و در نتیجه:

$$(k+3)(2k-1)a_{k+3} + 7(k-1)a_{k+2} = 0$$

پس برای $k \geq -2$ داریم:

$$a_{k+3} = -\frac{7(k-1)}{(k+3)(2k-1)}a_{k+2}$$

و با یک تغییر اندیس نتیجه می شود که برای $k \geq 1$ داریم:

$$a_k = -\frac{7(k-4)}{k(2k-7)}a_{k-1}$$

و با استفاده ز استقرا برای هر عدد طبیعی $k \geq 1$ بدست می آوریم:

$$a_k = (-1)^k \frac{7^k(k-4)(k-5)\dots(k-(k+3))}{k!\,(2k-7)(2k-9)\dots(2k-(2k+5))}a_0$$

با قرار دادن $a_0 = 1$ نتیجه می گیریم:

$$y_1(x) = |x|^{-3}(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{7^n(n-4)(n-5)\dots(n-(n+3))}{n!\,(2n-7)(2n-9)\dots(2n-(2n+5))}x^n)$$

اکنون y_2 را در معادله جایگذاری میکنیم. بدست می آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})b_n x^{n+1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} 7(n+\frac{1}{2})b_n x^{n+3/2} + \sum_{n=0}^{\infty} 7(n+\frac{1}{2})b_n x^{n+1/2} - \sum_{n=0}^{\infty} 3b_n x^{n+1/2} \equiv 0$$

به ازای $k \geq 1$ ضریب $x^{k+1/2}$ در عبارت فوق برابر است با:

$$2(k+\frac{1}{2})(k-\frac{1}{2})b_k + 7(k-\frac{1}{2})b_{k-1} + 7(k+\frac{1}{2})b_k - 3b_k$$

در نتیجه برای $k \geq 1$ داریم:

$$b_k = -\frac{7(k-\frac{1}{2})}{k(2k+7)} b_{k-1}$$

و در نتیجه با استفاده از استقرا برای $k \geq 1$ بدست می آوریم:

$$b_k = (-1)^k \frac{7^k(k-\frac{1}{2})(k-\frac{3}{2})...(k-(k-\frac{1}{2}))}{k!\,(2k+7)(2k+5)...(2k+(9-2k))} b_0$$

و در نهایت به قرار دادن $b_0 = 1$ بدست می آوریم:

$$y_2(x) = |x|^{1/2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{7^n(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2})...(n-(n-\frac{1}{2}))}{n!\,(2n+7)(2n+5)...(2n+(9-2n))} x^n)$$

و فرم کلی جواب معادله مذکور بصورت سری حول نقطه صفر عبارت است از:

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

- ج) در این معادله داریم $P(x) = x^2$ و $Q(x) = x^2 - 2x$ و $R(x) = 2$ و در نتیجه نقطه $x_0 = 0$ یک نقطه منفرد معادله است و از آنجایی که:

$$\lim_{x \to 0} x \frac{x^2 - 2x}{x^2} = -2$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{2}{x^2} = 2$$

نتیجه می شود که $x_0 = 0$ نقطه منفرد منظم معادله می باشد.

فرض کنید صورت جواب های این معادله به صورت سری حول نقطه صفر به فرم:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

باشد. با جایگذاری بدست می آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2(r+n)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{r+n} \equiv 0$$

اکنون در عبارت سمت چپ اتحاد فوق ضریب x^r برابر می شود با $r(r-1)a_0 - 2ra_0 + 2a_0$. در نتیجه:

$$(r^2 - 3r + 2)a_0 = 0 \Rightarrow r^2 - 3r + 2 = 0$$

ریشه های معادله مشخصه بالا عبارتند از $r_2 = 1$ و $r_1 = 2$. در نتیجه معادله مشخصه دارای ریشه های حقیقی و متمایز می باشند ولی اختلاف آنها عددی صحیح می باشد. در این حالت کاری که انجام می دهیم آن است که به ازای ریشه بزرگتر معادله مشخصه که مثلا آن را r_1 می نامیم جوابی به فرم:

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

پیدا می کنیم (و برای اینکه فرم کلی چنین جوابی مد نظر ما نیست می توان فرض کرد که $a_0 = 1$) و اگر به a_n ها به دید توابعی از r نگاه کنیم یعنی $a_n = a_n(r)$ و اگر ریشه کوچکتر معادله مشخصه را r_2 بنامیم آنگاه جواب دوم از طریق رابطه:

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_2}(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n)$$

بدست می آید که در آن با فرض اینکه $r_1 - r_2 = N$:

$$a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2) a_N(r)$$

$$c_n = \frac{d}{dr}((r - r_2) a_n(r))|_{r=r_2}$$

اکنون به ادامه حل سوال می پردازیم.در این سوال داریم $N = 2 - 1 = 1$ و در نتیجه $N = 1$. همچنین از آنجایی که میخواهیم نحوه وابستگی a_n به r را مطالعه کنیم فعلا با خود r_1, r_2 کار نمی کنیم. در رابطه ای که پس از جایگذاری جواب در معادله حاصل نمودیم به ازای $k \geq 1$ ضریب x^{r+k} در سمت چپ آن رابطه برابر می شود با:

$$(r+k)(r+k-1)a_k + (r+k-1)a_{k-1} - 2(r+k)a_k + 2a_k$$

و در نتیجه برای $k \geq 1$ باید داشته باشیم:

$$(r+k-1)(r+k-2)a_k + (r+k-1)a_{k-1} = 0$$

با عنوان یک حالت خاص برای $r = 2$ داریم:

$$a_k = -\frac{1}{k} a_{k-1}$$

و در نتیجه:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} a_0$$

با قرار دادن $a_0 = 1$ اولین جواب یعنی y_1 را داریم:

$$y_1(x) = x^2(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}) = x^2 e^{-x}$$

پس یکی از جواب ها عبارت است از:

$$y_1(x) = x^2 e^{-x}$$

اکنون به فرم کلی معادله بازگشتی بدست آمده (که در آن متغیر r درگیر است) بر میگردیم. برای $k \geq 1$ داریم:

$$a_k = -\frac{1}{r+k-2} a_{k-1}$$

و در نتیجه برای $k \geq 1$ داریم :

$$a_n(r) = \frac{(-1)^n}{(r+n-2)(r+n-3)...(r-1)}$$

بخصوص که $a_1(r) = -\frac{1}{r-1}$ و در نتیجه:

$$a = \lim_{r \to 1} -\frac{r-1}{r-1} = -1$$

پس $a = -1$. همچنین داریم:

$$(r-1)a_n(r) = \frac{(-1)^n (r-1)}{(r+n-2)(r+n-3)...(r-1)} = \frac{(-1)^n}{(r+n-2)(r+n-3)...(r-2)}$$

مقدار عبارت $(r-1)a_n(r)$ به ازای $r = 1$ را u_n می نامیم. برای $k = 1$ داریم:

$$a_1 = -\frac{1}{r-1} a_0 = \frac{-1}{r-1} \Rightarrow (r-1)a_1 = -1$$

و در نتیجه $c_1 = 0$. برای $k \geq 2$ داریم:

$$(r-1)a_k = -\frac{1}{r+k-2}(r-1)a_{k-1}$$

و در نتیجه با محاسبه مشتق دو طرف در $r = 1$ بدست می آوریم:

$$c_k = \frac{1}{(k-1)^2} u_{k-1} - \frac{1}{k-1} c_{k-1}$$

با استفاده از رابطه بازگشتی بالا می توان دنباله c_n را بدست آورد. به عنوان مثال داریم:

$$c_1 = 0 \quad , \quad c_2 = -1 \quad , \quad c_3 = \frac{3}{4} \quad , \quad c_4 = -\frac{11}{36}$$

و در نتیجه جواب دوم عبارت می شود از:

$$y_2(x) = -x^2 e^{-x} \ln|x| + |x|(1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n)$$

- د) در این معادله داریم $P(x) = x^2$ و $Q(x) = (x^2 + 2x)x$ و $R(x) = -2x$ و در نتیجه نقطه $x_0 = 0$ نقطه منفرد این معادله است و از آنجایی که:

$$\lim_{x \to 0} x \frac{(x^2 + 2x)x}{x^2} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} x^2 \frac{-2x}{x^2} = 0$$

نتیجه می شود که نقطه $x_0 = 0$ نقطه منفرد منظم این معادله می باشد.

فرض کنید جواب های این معادله بصورت سری حول نقطه صفر بصورت زیر باشند:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

با جایگذاری بدست می آوریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty}(r+n)a_n x^{r+n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(r+n)a_n x^{r+n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{r+n+1} \equiv 0$$

ضریب x^r در عبارت سمت چپ برابر می شود با $r(r-1)a_0$ و در نتیجه ریشه های معادله مشخصه برابر می شوند با $r_2 = 0$ و $r_1 = 1$. در این حالت هم مانند سوال قبل ریشه های معادله مشخصه حقیقی و متمایز هستند و اختلاف آنها در عددی صحیح می باشد. داریم $N = 1$ و ضریب x^{r+1} در عبارت سمت چپ عبارت است از:

$$r(r+1)a_1 + 2ra_0 - 2a_0$$

همچنین از آنجایی که $a_0 = 1$ باید داشته باشیم:

$$r(r+1)a_1 = -(2r-2)$$

و در نتیجه:

$$a_1(r) = -\frac{2r-2}{r(r+1)}$$

همچنین برای $k \geq 2$ ضریب x^{r+k} برابر می شود با:

$$(r+k)(r+k-1)a_k + (r+k-2)a_{k-2} + 2(r+k-1)a_{k-1} - 2a_{k-1}$$

و در نتیجه برای $k \geq 2$ داریم:

$$(r+k)(r+k-1)a_k + (r+k-2)a_{k-2} + 2(r+k-1)a_{k-1} - 2a_{k-1} = 0$$

با قرار دادن $r = 1$ دیده می شود که $a_1 = 0$ و برای $k \geq 2$ داریم:

$$k(k+1)a_k + (k-1)a_{k-2} + (2k-2)a_{k-1} = 0$$

به عنوان مثال داریم:

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 0 \quad , \quad a_2 = -\frac{1}{6} \quad , \quad a_3 = -\frac{1}{18} \quad , \quad a_4 = \frac{1}{24} \quad , \quad a_5 = -\frac{1}{270}$$

بنابراین اولین جواب معادله عبارت می شود از:

$$y_1(x) = |x|(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n) = |x|(1 - \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{270}x^5 + ...)$$

همچنین:

$$ra_1(r) = -\frac{2r-2}{r+1}$$

و در نتیجه $a = 2$. همچنین با ضرب طرفین معادله بازگشتی که در بالا نوشته شده است در r داریم (برای $k \geq 2$):

$$(r+k)(r+k-1)(ra_k(r)) + (r+k-2)(ra_{k-2}(r)) + 2(r+k-2)(ra_{k-1}(r)) = 0$$

اکنون از طرفین معادله بالا مشتق گرفته و مقدار آن را در صفر محاسبه میکنیم. اگر u_k نمایانگر مقدار $ra_k(r)$ در صفر باشد داریم (برای $k \geq 2$):

$$(k-1)u_k + ku_k + k(k-1)c_k + u_{k-2} + (k-2)c_{k-2} + 2u_{k-1} + 2(k-2)c_{k-1} = 0$$

و در نتیجه:

$$(2k-1)u_k + 2u_{k-1} + u_{k-2} + k(k-1)c_k + 2(k-2)c_{k-1} + (k-2)c_{k-2} = 0$$

اما داریم $u_1 = 2$ و $u_0 = 0$ و $u_2 = 0$ و با استفاده از استقرا می توان بررسی کرد که برای هر $k \geq 2$ رابطه $u_k = 0$ برقرار است.

همچنین داریم $c_0 = 1$ و $c_1 = -4$. پس جواب دوم نیز توسط رابطه زیر داده می شود:

$$y_2(x) = 2y_1(x) \ln |x| + (1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n)$$