پاسخنامه سری چهارم تمارین

درس معادلات دیفرانسیل

اردیبهشت ۹۹

بسمه تعالی

سوال ۱ جواب مسائل مقدار اولیه زیر را بدست آورید.

- الف)

$$y' + \frac{2}{t}y = \frac{\cos t}{t^2} \quad , \quad y(\pi) = 0 \quad , \quad t > 0$$

- ب)

$$y' - 2y = e^{2t} \quad , \quad y(0) = 2$$

- ج)

$$ty' + (t+1)y = t \quad , \quad y(\ln 2) = 1 \quad , \quad t > 0$$

- د)

$$y' = \frac{e^{-x} - e^{x}}{3 + 4y} \quad , \quad y(0) = 1$$

- و)

$$y' = xy^3(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad y(0) = 1$$

- ه)

$$y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy = \sin^{-1} x dx \quad , \quad y(0) = 1$$

پاسخ معادلاتی که در این سوال ظاهر شده می باشند معادلات خطی از مرتبه اول یا معادلات جدایی پذیر می باشند. معادلات خطی مرتبه اول معادلاتی به فرم:

$$y' + p(t)y + q(t) = 0$$

میباشند که در آن p, q توابعی پیوسته می باشند. عامل انتگرال ساز چنین معادلاتی توسط رابطه:

$$\mu(t) = \exp(\int_a^t p(\delta)d\delta)$$

بدست می آید که در آن a یک عدد ثابت است. با ضرب μ در طرفین معادله مرتبه اول اخیر رابطه زیر حاصل می شود:

$$(\mu y)' = -\mu q$$

و با انتگرال گیری از طرفین و کمی عملیات مقدماتی در نهایت جواب معادله حاصل می شود.

همچنین معادلاتی که بتوان آنها را به فرم زیر نوشت معادلات جدایی پذیر نامیده می شوند.

$$\alpha(x)dx = \beta(y)dy$$

در چنین معادلاتی نیز میتوان با انتگرال گیری مناسبی از طرفین در نهایت جواب معادله را (احتمالا به صورت ضمنی) حاصل نمود.

- الف) یک عامل انتگرال ساز برای معادله (الف) عبارت است از:

$$\mu(t) = \exp\left(\int_{\pi}^{t} \frac{2}{\tau}d\tau\right) = \frac{t^2}{\pi^2}$$

حال μ را در طرفین معادله ضرب میکنیم. داریم:

$$\frac{t^2}{\pi^2}y' + \frac{2t}{\pi^2}y = \frac{1}{\pi^2}\cos t$$

و در نتیجه:

$$\left(\frac{t^2}{\pi^2}y\right)' = \frac{1}{\pi^2}\cos t$$

اکنون از طرین تساوی در بازه $[\pi, t]$ انتگرال میگیریم و با توجه به اینکه $y(\pi) = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{t^2}{\pi^2}y(t) = \frac{1}{\pi^2}\sin t$$

و در نتیجه جواب معادله (الف) عبارت است از:

$$y(t) = \frac{\sin t}{t^2} \quad , \quad t > 0$$

- ب) یک عامل انتگرال ساز برای معادله (ب) عبارت است از:

$$\mu(t) = \exp\left(\int_{0}^{t} -2d\tau\right) = e^{-2t}$$

با ضرب μ در طرفین معادله (ب) داریم:

$$e^{-2t}y' - 2e^{-2t}y = 1$$

و در نتیجه:

$$(e^{-2t}y)' = 1$$

و با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[0,t]$ و با توجه به اینکه $y(0)=2$ خواهیم داشت:

$$e^{-2t}y(t)-2=t$$

و در نتیجه جواب معادله (ب) عبارت می شود از:

$$y(t)=(t+2)e^{2t}$$

- ج) ابتدا طرفین معادله (ج) را بر t تقسیم میکنیم. داریم:

$$y^{'}+\frac{t+1}{t}y=1$$

یک عامل انتگرال ساز برای این معادله عبارت است از:

$$\mu(t)=\exp(\int_{\ln 2}^{t}\frac{\tau+1}{\tau}d\tau)=\frac{1}{2\ln 2}te^{t}$$

با ضرب معادله در μ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2\ln 2}te^{t}y^{'}+\frac{1}{2\ln 2}(t+1)e^{t}y=\frac{1}{2\ln 2}te^{t}$$

و در نتیجه:

$$(\frac{1}{2\ln 2}te^{t}y)^{'}=\frac{1}{2\ln 2}te^{t}$$

یا به عبارتی دیگر:

$$(te^{t}y)^{'}=te^{t}$$

با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[\ln 2,t]$ و با توجه به اینکه $y(\ln 2)=1$ خواهیم داشت:

$$te^{t}y(t)-2\ln 2=te^{t}-2\ln 2-e^{t}+2$$

و در نتیجه جواب معادله (ج) عبارت می شود از:

$$y(t)=1-\frac{1}{t}+\frac{2}{t}e^{-t}\quad,\quad t>0$$

- د) معادله (د) را می توان به فرم زیر نوشت:

$$(3+4y)dy=(e^{-x}-e^{x})dx$$

که بوضوح یک معادله جدایی پذیر می باشد. از طرفین انتگرال میگیریم:

$$\int_{1}^{y(x)} (3+4\gamma)d\gamma = \int_{0}^{x} (e^{-\delta}-e^{\delta})d\delta$$

با محاسبه انتگرال ها نتیجه میگیریم:

$$3y(x)-3+2(y(x))^2-2=-e^{-x}-e^{x}+2$$

یا به عبارتی دیگر:

$$2(y(x))^2+3y(x)+e^{x}+e^{-x}-7=0$$

در نتیجه y بر حسب x بطور ضمنی توسط رابطه زیر توصیف میگردد:

$$2y^2+3y+e^{x}+e^{-x}-7=0$$

اگر طرف چپ رابطه بالا را با $F(x,y)$ نمایش دهیم آنگاه از آنجایی که در نقطه $(x,y)=(0,1)$ داریم:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=7\neq 0$$

از قضیه تابع ضمنی نتیجه می شود که جواب معادله (د) توسط رابطه ضمنی بیان شده بطور یکتا در بازه ای به قدر کافی کوچک حول نقطه $x=0$ حاصل می شود (البته در این حالت خاص میتوان با کمی محاسبه بازه ای حول نقطه صفر یافت که جواب در آن بازه اعتبار داشته باشد ولی در حالت کلی چنین کاری ممکن است سخت یا حتی نشدنی باشد).

- و) معادله (و) را نیز میتوان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{dy}{y^3}=\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}$$

که بوضوح این معادله نیز جدایی پذیر است. از آنجایی که $y(0)=1$ با انتگرال گیری داریم:

$$\int_{1}^{y(x)} \frac{d\gamma}{\gamma^3}=\int_{0}^{x}\frac{\delta d\delta}{\sqrt{1+\delta^2}}$$

و در نتیجه:

$$\frac{-1}{2(y(x))^2}+\frac{1}{2}=\sqrt{1+x^2}-1$$

بنابراین y بر حسب x توسط رابطه ضمنی زیر بیان میگردد:

$$\frac{-1}{2y^2} - \sqrt{1+x^2} + \frac{3}{2} = 0$$

و اگر سمت چپ تساوی بالا را با $G(x,y)$ نمایش دهیم آنگاه از آنجایی که در نقطه $(x,y) = (0,1)$ داریم:

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0,1) = 1 \neq 0$$

قضیه تابع ضمنی نتیجه میدهد که در بازه ای به اندازه کافی کوچک حول نقطه $x = 0$ میتوان y را بطور یکتا بر حسب x بیان نمود.

- ه) این معادله را نیز میتوان بدین صورت بیان نمود:

$$y^2 dy = \frac{\sin^{-1} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

و با توجه به اینکه $y(0) = 1$ با انتگرال گیری داریم:

$$\int_1^{y(x)} \gamma^2 d\gamma = \int_0^x \frac{\sin^{-1}\delta d\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}$$

در نتیجه:

$$\frac{(y(x))^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}(\sin^{-1} x)^2$$

در نتیجه y بر حسب x بطور ضمنی توسط رابطه زیر بدست می آید:

$$y^3 - \frac{3}{2}(\sin^{-1} x)^2 - 1 = 0$$

و اگر طرف چپ تساوی را برابر با $H(x,y)$ در نظر بگیریم آنگاه در نقطه $(x,y) = (0,1)$ داریم:

$$\frac{\partial H}{\partial y}(0,1) = 3 \neq 0$$

در نتیجه قضیه تابع ضمنی بیان میکند که در بازه ای به قدر کافی کوچک حول نقطه $x = 0$ میتوان y را بطور یکتا بر حسب x از معادله ضمنی بیان شده استخراج نمود (البته در این مثال خاص همانطور که مشاهده میکنید میتوان بطور صریح y را بر حسب x حاصل نمود).

سوال ۲ فاکتور انتگرال را پیدا کرده و معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

- الف)

$$1 + (\frac{x}{y} - \sin y)y' = 0$$

• ب)

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

• ج)

$$(3x + \frac{6}{y}) + (\frac{x^2}{y} + \frac{3y}{x})\frac{dy}{dx} = 0$$

پاسخ ابتدا کمی یادآوری بیان میکنیم. معادلاتی به فرم:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

را کامل می گوییم هرگاه یک دیفرانسیل کامل باشند. بدان معنا که تابعی مانند $f(x, y)$ به قسمی موجود باشد که:

$$df = Pdx + Qdy$$

یادآوری میکنیم که $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$. یک شرط لازم برای کامل بودن معادله مذکور این است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

در صورتی که رابطه فوق برقرار نباشد طرفین معادله را در تابعی مجهول مانند $\mu(x, y)$ ضرب نموده (که آن را اصطلاحا یک عامل انتگرال ساز معادله) و سعی میکنیم آن را به قسمی بدست بیاوریم که معادله :

$$\mu Pdx + \mu Qdy = 0$$

به یک معادله کامل تبدیل شود.گزینه های پیشنهادی برای تابع μ در بسیاری از حالات میتوانند به این صورت ها باشند:

یا تابعی فقط از متغیر x یا تابعی فقط وابسته به متغیر y یا تابعی از xy یا تابعی از $ax + by$ که a, b اعداد ثابتی هستند.

یا بصورت تابعی از $x^{\alpha}y^{\beta}$ که α, β اعداد ثابتی هستند یا ...

ولی در حالت کلی ممکن است μ تابعی از x, y باشد و این در حالی باشد که x, y هیچ ارتباط خاصی با یکدیگر نداشته باشند.

• الف) معادله مذکور را می توان به صورت زیر نوشت:

$$dx + (\frac{x}{y} - \sin y)dy = 0$$

با یک بررسی ساده می توان دید که معادله فوق کامل نیست. فرض کنید عامل انتگرال ساز به فرم $\mu(y)$ باشد. پس باید μ را به قسمی یافت که معادله زیر کامل شود:

$$\mu(y)dx + (\frac{x\mu(y)}{y} - \mu(y)\sin y)dy = ۰$$

قرار میدهیم:

$$P(x,y) = \mu(y) \quad , \quad Q(x,y) = \frac{x\mu(y)}{y} - \mu(y)\sin y$$

بنابراین:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \mu^{'}(y) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\mu(y)}{y}$$

و در نتیجه یک عامل انتگرال ساز معادله برابر می شود با $\mu(x,y) = y$. در نتیجه معادله زیر کامل می شود:

$$ydx + (x - y\sin y)dy = ۰$$

معادله فوق را می توان بصورت زیر نوشت:

$$(ydx + xdy) - y\sin ydy = ۰$$

در نتیجه:

$$d(xy) - d(\sin y - y\cos y) = ۰ \Rightarrow d(xy + y\cos y - \sin y) = ۰$$

بنابراین جواب عمومی معادله مذکور توسط رابطه زیر که بطور ضمنی بین x, y برقرار است بدست می آید:

$$xy + y\cos y - \sin y = C$$

که در آن C عددی ثابت است.

- ب) این معادله را می توان به فرم زیر نوشت:

$$ydx + (۲xy - e^{-۲y})dy = ۰$$

با یک بررسی ساده دیده می شود که معادله فوق کامل نیست و در نتیجه باید دنبال عامل انتگرال ساز بگردیم. فرض کنید عامل انتگرال ساز فقط تابعی از y باشد. مثلا $\mu(y)$. پس باید μ را به قسمی بیابیم که معادله زیر کامل شود:

$$y\mu(y)dx + (۲xy\mu(y) - \mu(y)e^{-۲y})dy = ۰$$

قرار می دهیم $P(x,y)=y\mu(y), Q(x,y)=2xy\mu(y)-\mu(y)e^{-2y}$. در نتیجه:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\mu+y\mu' \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2y\mu$$

پس μ باید در معادله دیفرانسیل زیر صدق کند:

$$y\mu'=(2y-1)\mu$$

با روش جداسازی متغیر ها میتوان نتیجه گرفت که تابع $\mu(y)=\frac{e^{2y}}{y}$ یک عامل انتگرال ساز می باشد. در نتیجه:

$$e^{2y}dx+(2xe^{2y}-\frac{1}{y})dy=0$$

رابطه فوق را می توان بدین صورت نیز نوشت:

$$(e^{2y}dx+2xe^{2y}dy)-\frac{dy}{y}=0\Rightarrow d(xe^{2y})-\frac{dy}{y}=0$$

و در نتیجه:

$$d(xe^{2y}-\ln|y|)=0$$

بنابراین جواب عمومی معادله داده شده بطور ضمنی بر حسب x, y توسط رابطه زیر بیان می شود:

$$xe^{2y}-\ln|y|=C$$

که در آن C عددی ثابت است.

- ج) این معادله را میتوان بصورت زیر نیز نوشت:

$$(3x+\frac{6}{y})dx+(\frac{x^2}{y}+\frac{3y}{x})dy=0$$

با یک بررسی ساده مشخص می شود که این معادله کامل نمیباشد و همچنین با محاسباتی ساده نتیجه میشود که برای این معادله نمیتوان عامل انتگرال سازی یافت که فقط وابسته به x یا y باشد. حال بررسی میکنیم که آیا میتوان عامل انتگرال سازی مانند $x^\alpha y^\beta$ برای معادله فوق یافت یا خیر. بدین منظور باید α, β را به قسمی بیابیم که معادله زیر کامل شود:

$$(3x^{\alpha+1}y^\beta+6x^\alpha y^{\beta-1})dx+(x^{\alpha+1}y^{\beta-1}+3x^{\alpha-1}y^{\beta+1})dy=0$$

یا به عبارتی دیگر لازم است که تساوی زیر برقرار باشد:

$$3\beta x^{\alpha+1}y^{\beta-1}+6(\beta-1)x^\alpha y^{\beta-2}=(\alpha+2)x^{\alpha+1}y^{\beta-1}+3(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{\beta+1}$$

به آسانی دیده می شود که تساوی فوق به ازای $\alpha = \beta = ۱$ برقرار است و در نتیجه یک عامل انتگرال ساز برای معادله مذکور عبارت است از $\mu(x, y) = xy$. پس معادله زیر کامل می باشد:

$$(۳x^۲y + ۶x)dx + (x^۳ + ۳y^۲)dy = ۰$$

رابطه بالا را می توان بدین صورت نیز بیان نمود:

$$(۳x^۲ydx + x^۳dy) + ۶xdx + ۳y^۲dy = ۰$$

و در نتیجه:

$$d(x^۳y + ۳x^۲ + y^۳) = ۰$$

پس جواب عمومی معادله مذکور بطور ضمنی توسط رابطه زیر بیان می شود:

$$x^۳y + ۳x^۲ + y^۳ = C$$

که در آن C یک عدد ثابت می باشد.

سوال ۳ مقدار $y_۰$ را طوری پیدا کنید که جواب مسئله مقدار اولیه زیر وقتی که $t \to \infty$ کراندار باقی بماند.

$$y' - y = ۳ \sin t + ۱ \quad , \quad y(۰) = y_۰$$

پاسخ یک عامل انتگرال ساز برای معادله بالا عبارت است از $\mu(t) = e^{-t}$. با ضرب طرفین معادله در μ داریم:

$$(e^{-t}y)' = ۳e^{-t} \sin t + e^{-t}$$

با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[۰, t]$ داریم:

$$e^{-t}y(t) - y_۰ = \int_۰^t (۳e^{-\tau} \sin \tau + e^{-\tau})d\tau$$

با محاسبه انتگرال در نهایت بدست می آوریم:

$$y(t) = -۱ + (y_۰ + \frac{۵}{۲})e^t - \frac{۳}{۲} \sin t - \frac{۳}{۲} \cos t$$

همانطور که مشاهده میکنید در عبارت $y(t)$ جمله $(y_۰ + \frac{۵}{۲})e^t$ ظاهر شده است که در صورتی که صفر نشود باعث میشود جواب وقتی $t \to \infty$ به سمت ∞ یا $-\infty$ میل کند. پس برای کراندار ماندن جواب در ∞ لازم است که $y_۰ = -\frac{۵}{۲}$. به ازای $y_۰ = -\frac{۵}{۲}$ جواب مسئله عبارت می شود از:

$$y(t) = -۱ - \frac{۳}{۲} \sin t - \frac{۳}{۲} \cos t$$

سوال ۴ نشان دهید اگر a, λ دو عدد مثبت و b عد حقیقی دلخواه باشد آنگاه هر جواب معادله :

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

دارای این خاصیت است که وقتی $t \to \infty$ خواهیم داشت $y \to 0$.

پاسخ فرض کنید $y(0) = y_0$. یک عامل انتگرال ساز برای معادله بالا عبارت است از $\mu(t) = e^{at}$. با ضرب طرفین معادله بالا در μ خواهیم داشت:

$$(e^{at}y)' = be^{(a-\lambda)t}$$

ابتدا فرض کنید $a \neq \lambda$. با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[0, t]$ بدست می آوریم:

$$e^{at}y(t) - y_0 = \frac{b}{a-\lambda}e^{(a-\lambda)t} - \frac{b}{a-\lambda}$$

در نتیجه جواب کلی معادله مذکور عبارت می شود از:

$$y(t) = (y_0 - \frac{b}{a-\lambda})e^{-at} + \frac{b}{a-\lambda}e^{-\lambda t}$$

از آنجایی که a, λ مثبت هستند نتیجه میشود که وقتی $t \to \infty$ داریم $e^{-at}, e^{-\lambda t} \to 0$ و در نتیجه مستقل از انتخاب y_0 وقتی $t \to \infty$ خواهیم داشت $y(t) \to 0$.

حال اگر $a = \lambda$ آنگاه:

$$(e^{at}y)' = b$$

و در نتیجه جواب معادله در این حالت عبارت می شود از:

$$y(t) = (bt + y_0)e^{-at}$$

و از آنجایی که $a > 0$ نتیجه میشود که e^{at} از هر چند جمله ای دلخواهی سریع تر رشد میکند. در نتیجه در این حالت نیز وقتی $t \to \infty$ خواهیم داشت $y(t) \to 0$ (مستقل از انتخاب y_0).

پس در تمام حالات نتیجه گرفتیم که هر جواب معادله مذکور وقتی $t \to \infty$ به سمت صفر میل میکند.

سوال ۵ با استفاده از روش تغییر پارامتر معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

- الف)

$$ty' + 2y = \sin t \quad , \quad t > 0$$

- ب)

$$۲y^{'} + y = ۳t^{۲}$$

- ج)

$$y^{'} + \frac{۱}{t}y = ۳\cos ۲t \quad , \quad t > ۰$$

پاسخ در روش تغییر پارامتر کاری که انجام میدهیم آن است که پارامتر جدیدی مانند w معرفی نموده و سعی میکنیم t را بر حسب w یا برعکس طوری مشخص کنیم که معادله بدست آمده بر حسب پارامتر جدید به آسانی قابل حل باشد.

- الف) قرار میدهیم $t = t(w)$. در نتیجه:

$$\frac{dy}{dw} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dw} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dw}/t^{'}(w)$$

با بازنویسی معادله (الف) داریم:

$$\frac{t(w)}{t^{'}(w)}(yot)^{'}(w) + ۲(yot)(w) = \sin t(w)$$

حال بوضوح مشاهده می شود که هرگاه $t(w) = e^{w}$ آنگاه با فرض $z(w) = yot(w) = y(e^{w})$ به معادله زیر می رسیم:

$$z^{'}(w) + ۲z(w) = \sin e^{w}$$

یک عامل انتگرال ساز برای معادله فوق برابر است با $e^{۲w}$. با ضرب این عامل انتگرال ساز در طرفین داریم:

$$(e^{۲w}z)^{'} = e^{۲w}\sin e^{w}$$

فرض کنید $z(۰) = a$. با انتگرال گیری در بازه $[۰, w]$ داریم:

$$e^{۲w}z(w) - a = -e^{w}\cos e^{w} + \sin e^{w} + \cos ۱ - \sin ۱$$

و در نتیجه:

$$z(w) = (a + \cos ۱ - \sin ۱)e^{-۲w} + e^{-۲w}\sin e^{w} - e^{-w}\cos e^{w}$$

در نهایت $y(t) = z(\ln t)$ و در نتیجه جواب عمومی معادله اصلی عبارت می شود از:

$$y(t) = \frac{a + \cos ۱ - \sin ۱ + \sin t - t\cos t}{t^{۲}} \quad , \quad t > ۰$$

- ب) با فرض $t=t(w)$ داریم:

$$\frac{2}{t'(w)}(yot)'(w)+(yot)(w)=3(t(w))^2$$

فرض کنید $t(w)=\sqrt[3]{w}$. در نتیجه اگر قرار دهیم $z(w)=yot(w)=y(\sqrt[3]{w})$ آنگاه:

$$z'(w)+\frac{1}{6\sqrt[3]{w^2}}z(w)=\frac{1}{2}$$

یک عامل انتگرال ساز برای معادله بالا عبارت است از $\mu(w)=\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})$. با ضرب μ در طرفین داریم:

$$(\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})z)'=\frac{1}{2}\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})$$

فرض کنید $a=z(1)$. در نتیجه با انتگرال گیری داریم:

$$\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})z(w)-\sqrt{e}a=3(\sqrt[3]{w})^2\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})-12\sqrt[3]{w}\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})+24\exp(\frac{1}{2}\sqrt[3]{w})-15\sqrt{e}$$

و آز آنجایی که $y(t)=z(t^3)$ خواهیم داشت:

$$e^{\frac{1}{2}t}y(t)-\sqrt{e}a=3t^2e^{\frac{1}{2}t}-12te^{\frac{1}{2}t}+24e^{\frac{1}{2}t}-15\sqrt{e}$$

و در نتیجه جواب عمومی معادله اصلی عبارت می شود از:

$$y(t)=3t^2-12t+24+\sqrt{e}(a-15)e^{-\frac{1}{2}t}\quad,\quad t\in\mathbb{R}$$

- ج) با فرض $t=t(w)$ معادله را باز نویسی میکنیم:

$$\frac{1}{t'(w)}(yot)'(w)+\frac{1}{t(w)}yot(w)=3\cos 2t(w)$$

با قرار دادن $t(w)=e^w$ و $z(w)=y(e^w)$ به معادله زیر می رسیم:

$$z'(w)+z(w)=3e^w\cos 2e^w$$

با ضرب طرفین تساوی در e^w داریم:

$$(e^wz(w))'=3e^{2w}\cos 2e^w$$

فرض کنید $a=z(0)$ و با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[0,w]$ داریم:

$$e^wz(w)-a=\frac{3}{2}e^w\sin 2e^w+\frac{3}{4}\cos 2e^w-\frac{3}{2}\sin 2-\frac{3}{4}\cos 2$$

و از آنجایی که $y(t) = z(\ln t)$ نتیجه میگیریم که:

$$ty(t) - a = \frac{۳}{۲}t\sin ۲t + \frac{۳}{۴}\cos ۲t - \frac{۳}{۲}\sin ۲ - \frac{۳}{۴}\cos ۲$$

و در نتیجه جواب عمومی معادله اصلی عبارت می شود از:

$$y(t) = \frac{۳}{۲}\sin ۲t + \frac{۳}{۴t}\cos ۲t - \frac{۳}{۲t}\sin ۲ - \frac{۳}{۴t}\cos ۲ + \frac{a}{t} \quad , \quad t > ۰$$

سوال ۶ نقاطی از صفحه ty را پیدا کنید که معادله در بازه ای از آن نقاط دارای جواب است.

- الف)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{۱ + t^۲}{۳y - y^۲}$$

- ب)

$$y' = \frac{\ln |ty|}{۱ - t^۲ + y^۲}$$

پاسخ با استفاده از قضیه وجود و یکتایی پیکارد که در پاسخ تمرین شماره یازده یادآوری شده است به حل این مسائل می پردازیم.

- الف) قرار می دهیم $f(t, y) = \frac{۱ + t^۲}{۳y - y^۲}$. فرض کنید E مجموعه ای از نقاط $(t_۰, y_۰)$ در صفحه ty باشد به قسمی که $y_۰ \neq ۰, ۳$. در نتیجه میتوان اعداد مثبت به قدر کافی کوچک a, b را چنان یافت به قسمی که f روی مستطیل:

$$S = \{(t, y) : |t - t_۰| \leq a \quad , \quad |y - y_۰| \leq b\}$$

پیوسته بوده و بعلاوه در شرط لیپشیتز نسبت به پارامتر y صدق کند. اکنون قضیه وجود و یکتایی پیکارد بیان میکند که مسئله مقدار اولیه :

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_۰) = y_۰$$

دارای جواب یکتایی است که این جواب در بازه ای به قدر کافی کوچک حول $t_۰$ تعریف شده است. پس مجموعه نقاطی که مسئله در بازه کوچکی حول نقطه شروع دارای جواب می باشد عبارت است از:

$$E = \{(t, y) \in \mathbb{R}^۲ : y \neq ۰, ۳\}$$

- ب) قرار می دهیم $f(t, y) = \frac{\ln |ty|}{۱ - t^۲ + y^۲}$. دامنه تعریف f عبارت است از:

$$G = \{(t, y) : ۱ - t^۲ + y^۲ \neq ۰ \quad , \quad t \neq ۰ \quad , \quad y \neq ۰\}$$

هر گاه $(t_\circ, y_\circ) \in G$ آنگاه به ازای اعداد مثبت به قدر کافی کوچک a, b تابع f روی مستطیل:

$$S = \{(t, y) : |t - t_\circ| \le a \quad , \quad |y - y_\circ| \le b\}$$

پیوسته بوده و در شرط لیپشیتز نسبت به متغیر y صدق میکند. با استناد به قضیه وجود و یکتایی پیکارد نتیجه می شود که مجموعه نقاط $(t_\circ, y_\circ)$ که به ازای آنها مسئله مقدار اولیه:

$$y' = f(t, y) \quad , \quad y(t_\circ) = y_\circ$$

دارای جواب یکتایی است که بطور موضعی تعریف شده می باشد عبارت است از مجموعه G.

سوال ۷ معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$(ax + by)dx + (cx + dy)dy = ۰$$

شرط لازم را طوری پیدا کنید که معادله بالا کامل باشد. سپس جواب عمومی معادله را بدست آوريد.

پاسخ قرار می دهیم $P(x, y) = ax + by, Q(x, y) = cx + dy$. برای کامل بودن معادله بالا باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

و در نتیجه اگر معادله بالا کامل باشد لزوما داریم $b = c$. با چنین فرضی معادله فوق را باز نویسی میکنیم:

$$(ax + by)dx + (bx + dy)dy = ۰$$

این معادله را میتوان بدین صورت نیز نوشت:

$$(ax)dx + (dy)dy + b(ydx + xdy) = ۰$$

در نتیجه:

$$d(\frac{ax^۲}{۲} + \frac{dy^۲}{۲} + bxy) = ۰$$

بنابراین جواب عمومی معادله مذکور (به شرط کامل بودن) عبارت می شود از:

$$ax^۲ + ۲bxy + dy^۲ = C$$

که در آن C یک عدد ثابت می باشد.

سوال ۸ (معادله ریکاتی) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y' + p_2(x)y + p_3(x) + p_1(x)y^2 = 0$$

- الف) فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله باشد. نشان دهید جواب عمومی معادله به فرم :

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$$

است بطوریکه z جواب معادله دیفرانسیل زیر می باشد:

$$z' - (2y_1(x)p_1(x) + p_2(x))z = p_1(x)$$

- ب) یک جواب معادله زیر را حدس زده و با استفاده از قسمت (الف) جواب عمومی معادله را بدست آورید.

$$y' = \frac{2}{x}y + x^3 - \frac{1}{x}y^2$$

پاسخ

- الف) فرض کنید y, y_1 دو جواب معادله ریکاتی مذکور باشند. کافیست نشان دهیم تابع:

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - y_1(x)}$$

در معادله مرتبه اول :

$$z' - (2y_1(x)p_1(x) + p_2(x))z = p_1(x)$$

صدق میکند. بدین منظور کمی محاسبات انجام میدهیم:

$$z'(x) = -\frac{y'(x) - y_1'(x)}{(y(x) - y_1(x))^2}$$

و داریم:

$$y'(x) - y_1'(x) = -p_2(x)y(x) - p_3(x) - p_1(x)y^2(x) + p_2(x)y_1(x) + p_3(x) + p_1(x)y_1^2(x)$$

در نتیجه:

$$y'(x) - y_1'(x) = -p_2(x)(y(x) - y_1(x)) - p_1(x)(y(x) - y_1(x))(y(x) + y_1(x))$$

و بنابراین:

$$z'(x) = \frac{p_2(x) + p_1(x)(y(x) + y_1(x))}{y(x) - y_1(x)}$$

حال خواهیم داشت:

$$z' - (2y_1(x)p_1(x) + p_2(x))z = \frac{p_2(x) + p_1(x)y(x) + p_1(x)y_1(x) - 2p_1(x)y_1(x) - p_2(x)}{y(x) - y_1(x)}$$
$$= \frac{p_1(x)(y(x) - y_1(x))}{y(x) - y_1(x)} = p_1(x)$$

و در نتیجه:

$$z' - (2y_1(x)p_1(x) + p_2(x))z = p_1(x)$$

- ب) به آسانی می توان بررسی کرد که تابع $y_1(x) = x^2$ یک جواب معادله داده شده می باشد. حال مطابق قسمت (الف) باید تابع $z(x)$ را از معادله زیر استخراج کنیم:

$$z' - (2x - \frac{2}{x})z = \frac{1}{x}$$

یک عامل انتگرال ساز برای معادله فوق عبارت است از $\mu(x) = x^2e^{-x^2}$. با ضرب μ در طرفین معادله بدست می آوریم:

$$(x^2e^{-x^2}z)' = xe^{-x^2}$$

فرض کنید $z(1) = a$. با انتگرال گیری در بازه $[1, x]$ بدست می آوریم:

$$x^2e^{-x^2}z(x) - \frac{a}{e} = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{1}{2e}$$

و در نهایت بدست می آوریم:

$$z(x) = -\frac{1}{2x^2} + \frac{2a+1}{2ex^2}e^{x^2} = \frac{(2a+1)e^{x^2} - e}{2ex^2}$$

که a ثابتی دلخواه می باشد. در نتیجه صورت کلی جواب معادله مذکور عبارت می شود از:

$$y(x) = x^2 + \frac{2ex^2}{(2a+1)e^{x^2} - e}$$

سوال ۹ معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$ydx + x(1 - 3x^2y^2)dy = 0$$

- الف) نشان دهید این معادله کامل نیست.
- ب) اگر $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ یک عامل انتگرال ساز برای معادله بالا باشد مقدار α, β را به دست آورید.

- ج) با استفاده از قسمت (ب) جواب عمومی معادله را بدست آورید.

پاسخ

- الف) قرار دهید $P(x,y)=y$ و $Q(x,y)=x-3x^3y^2$. در نتیجه:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=1 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=1-9x^2y^2$$

و از آنجایی که دو عبارت فوق با یکدیگر برابر نیستند نتیجه می شود که معادله مذکور کامل نمی باشد.

- ب) بدین منظور باید α,β را به قسمی بیابیم که معادله زیر کامل شود:

$$x^{\alpha}y^{\beta+1}dx+(x^{\alpha+1}y^{\beta}-3x^{\alpha+3}y^{\beta+2})dy=0$$

قرار می دهیم $P(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta+1}$ و $Q(x,y)=x^{\alpha+1}y^{\beta}-3x^{\alpha+3}y^{\beta+2}$. در نتیجه:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=(\beta+1)x^{\alpha}y^{\beta} \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=(\alpha+1)x^{\alpha}y^{\beta}-3(\alpha+3)x^{\alpha+2}y^{\beta+2}$$

اکنون شرط لازم برای کامل بودن معادله بالا آن است که دو عبارت فوق با یکدیگر برابر باشند که این برابری به ازای انتخاب $\alpha=\beta=-3$ حاصل می شود. بنابراین عامل انتگرال ساز عبارت می شود از $\mu(x,y)=x^{-3}y^{-3}$.

- ج) با ضرب معادله دیفرانسیل ذکر شده در صورت سوال در عامل انتگرال ساز بدست آمده داریم:

$$x^{-3}y^{-2}dx+(x^{-2}y^{-3}-3y^{-1})dy=0$$

در نتیجه:

$$(x^{-3}y^{-2}dx+x^{-2}y^{-3}dy)-\frac{3dy}{y}=0$$

بنابراین:

$$d(-\frac{1}{2x^2y^2}-3\ln|y|)=0$$

و جواب عمومی معادله دیفرانسیل مذکور بطور ضمنی عبارت می شود از:

$$\frac{1}{2x^2y^2}+3\ln|y|=C$$

که در آن C یک عدد ثابت است.

سوال ۱۰ معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید و رفتار جواب را نسبت به a بررسی کنید.

- الف)

$$ty'+(t+1)y=2te^{-t} \quad , \quad y(1)=a \quad , \quad t>0$$

• ب)

$$(\sin t)y' + (\cos t)y = e^t \quad , \quad y(۱) = a \quad , \quad ۰ < t < \pi$$

پاسخ • الف) با تقسیم طرفین معادله بر t داریم:

$$y' + \frac{t+۱}{t}y = ۲e^{-t}$$

یک عامل انتگرال ساز برای معادله بالا عبارت است از $\mu(t) = te^t$. با ضرب μ در طرفین معادله داریم:

$$te^t y' + (t+۱)e^t y = ۲t$$

و در نتیجه:

$$(te^t y)' = ۲t$$

با انتگرال گیری از طرفین در بازه $[۱, t]$ داریم:

$$te^t y(t) - ae = t^۲ - ۱$$

و در نتیجه جواب مسئله مقدار اولیه فوق برابر می شود با:

$$y(t; ۱, a) = te^{-t} + (ae - ۱)\frac{e^{-t}}{t} \quad , \quad t > ۰$$

(وقتی مینویسیم $y(t; t_۰, x_۰)$ منظور جواب یکتای یک مسئله مقدار اولیه می باشد که در لحظه $t_۰$ برابر با $x_۰$ می باشد). اکنون برای بررسی رفتار جواب نسبت به پارامتر a (اینکه ببینیم جواب چقدر نسبت به شرط اولیه حساسیت دارد) معمولا رسم بر آن است که کمیت زیر برای دو عدد $a_۱, a_۲$ مورد مطالعه قرار میگیرد:

$$||y(t; ۱, a_۱) - y(t; ۱, a_۲)||_J := \sup_{t\in J}|y(t; ۱, a_۱) - y(t; ۱, a_۲)|$$

که در آن $J \subseteq (۰, \infty)$ یک زیر بازه دلخواه می باشد. مثلا برای بررسی اینکه "جواب نسبت به شرط اولیه بطور پیوسته تغییر میکند" باید این مطلب بررسی شود که آیا برای $\epsilon > ۰$ داده شده میتوان $\delta > ۰$ ای یافت به قسمی که :

$$|a_۱ - a_۲| < \delta \Rightarrow ||y(t; ۱, a_۱) - y(t; ۱, a_۲)||_J < \epsilon$$

یا حتی طبیعی است که سوال کنیم " آیا جواب نسبت به شرط اولیه بطور لیپشیتز تغییر میکند" و همچنین میتوان انواع وابستگی های دیگر جواب نسبت به شرط اولیه را بیان نمود (مانند تغییر هموار نسبت به شرط اولیه) که در

این درس بهتر است که وابستگی های دیگر بحث نشود.

ابتدا فرض کنید $J = (\lambda, \infty)$ یا $J = (\lambda, \eta)$ که در آن λ, η اعدادی اکیدا مثبت می باشند. در نتیجه تابع $\frac{e^{-t}}{t}$ روی J کراندار می باشد و در نتیجه عدد مثبت K وجود دارد که برای هر $t \in J$ داریم:

$$\frac{e^{-t}}{t} \leq K$$

اکنون برای $t \in J$ می توان نوشت:

$$|y(t;۱, a_۱) - y(t;۱, a_۲)| = |e(a_۱ - a_۲)\frac{e^{-t}}{t}| \leq Ke|a_۱ - a_۲|$$

در نتیجه:

$$||y(t;۱, a_۱) - y(t;۱, a_۲)||_J \leq Ke|a_۱ - a_۲|$$

بنابراین روی چنین زیر بازه های J ای میتوان گفت که جواب نسبت به شرط اولیه وابستگی لیپشیتز دارد و یک نتیجه این است که جواب به ازای چنین زیر بازه هایی نسبت به شرط اولیه بطور پیوسته تغییر میکند.

حال فرض کنید $J = (۰, \infty)$ یا $J = (۰, \lambda)$ که در آن λ عددی مثبت است در اینصورت به سادگی میتوان بررسی کرد که اگر $a_۱ \neq a_۲$ آنگاه $||y(t;۱, a_۱) - y(t;۱, a_۲)||_J = \infty$. در نتیجه روی چنین زیر بازه هایی جواب نسبت به شرط اولیه بطور پیوسته تغییر نمیکند.

- ب) طرف چپ تساوی یک دیفرانسیل کامل است. در واقع داریم:

$$((\sin t)y)' = e^t$$

و با انتگرال گیری در بازه $[۱, t]$ داریم:

$$(\sin t)y(t) - a\sin ۱ = e^t - e$$

و در نتیجه جواب مسئله مقدار اولیه داده شده عبارت است از:

$$y(t;۱, a) = \frac{e^t}{\sin t} + \frac{a\sin ۱ - e}{\sin t} \quad , \quad ۰ < t < \pi$$

اکنون فرض کنید $J \subseteq (۰, \pi)$ یک زیر بازه دلخواه باشد و برای دو عدد حقیقی $a_۱, a_۲$ کمیت زیر را مطالعه میکنیم:

$$||y(t;۱, a_۱) - y(t;۱, a_۲)||_J := \sup_{t\in J}|y(t;۱, a_۱) - y(t;۱, a_۲)|$$

مشابه آنچه که در قسمت (الف) انجام شد نتیجه می شود که اگر $J = (\lambda, \eta)$ که λ, η اعداد اکیدا مثبت و مخالف π باشند آنگاه روی چنین زیر بازه هایی جواب نسبت به شرط اولیه وابستگی لیپشینز دارد و در نتیجه جواب نسبت

به شرط اولیه بطور پیوسته تغییر میکند ولی روی زیر بازه هایی به فرم $J = (\lambda, \pi)$ یا $J = (0, \eta)$ جواب نسبت به شرط اولیه بطور پیوسته تغییر نمیکند.

سوال ۱۱ مسائل مقدار اولیه زیر را حل کرده و یک بازه ای که جواب در آن تعریف شده است را مشخص کنید.

- الف)

$$y' = \frac{1+3x^2}{3y^2-6y} \quad , \quad y(0) = 1$$

- ب)

$$y' = \frac{3x^2}{3y^2-4} \quad , \quad y(1) = 0$$

پاسخ قبل از پاسخ به سوال ابتدا نیاز میبینیم که صورت کلی قضیه وجود و یکتایی پیکارد را بیان کنیم. فرض کنید (x_0, y_0) نقطه ای در صفحه باشد و فرض کنید که a, b اعدادی مثبت باشند. فرض کنید $f(x, y)$ تابعی باشد که روی مستطیل:

$$S = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \quad , \quad |y - y_0| \leq b\}$$

تعریف شده و روی آن پیوسته باشد و بعلاوه در شرط لیپشیتز نسبت به متغیر y صدق کند. این بدان معناست که عدد ثابت مثبت k به قسمی موجود است که برای هر x, y_1, y_2 که $(x, y_1), (x, y_2) \in S$:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k|y_1 - y_2|$$

فرض کنید:

$$M = \max_{(x,y)\in S}|f(x, y)| \quad , \quad A = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

در اینصورت مسئله مقدار اولیه:

$$y' = f(x, y) \quad , \quad y(x_0) = y_0$$

دارای جواب (یکتایی) است و این جواب روی بازه $x \in [x_0 - A, x_0 + A]$ اعتبار دارد.

- الف) با بازنویسی معادله مذکور بدست می آوریم:

$$(3y^2 - 6y)dy = (1 + 3x^2)dx$$

معادله فوق یک معادله جدایی پذیر است. از طرفین انتگرال میگیریم:

$$\int_1^{y(x)} (3\gamma^2 - 6\gamma)d\gamma = \int_0^x (1 + 3\delta^2)d\delta$$

در نتیجه:

$$(y(x))^3 - 3(y(x))^2 + 2 = x + x^3$$

در نتیجه x, y توسط رابطه ضمنی زیر با یکدیگر در ارتباط هستند:

$$y^3 - 3y^2 + 2 - x - x^3 = 0$$

و اگر طرف چپ معادله را با $F(x, y)$ نمایش دهیم آنگاه از آنجایی که:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 1) = -3 \neq 0$$

قضیه تابع ضمنی نتیجه می دهد که در بازه ای به قدر کافی کوچک حول $x = 0$ رابطه بالا بطور یکتا y را بر حسب x مشخص میکند.

اکنون به فرم اصلی معادله برمیگردیم:

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y} = f(x, y)$$

و همچنین داریم $(x_0, y_0) = (0, 1)$. تابع $f(x, y)$ روی مستطیل:

$$S = \{(x, y) : |x| \leq 1 \quad , \quad |y - 1| \leq \frac{1}{2}\}$$

پیوسته می باشد. همچنین از آنجایی که مشتق جزئی f نسبت به y روی S پیوسته می باشد و در نتیجه کراندار می باشد با استدلال هایی مانند قضیه مقدار میانگین و ... نتیجه می شود که f نسبت به y روی S در شرط لیپشیتز صدق میکند. حال کافیست ماگزیمم $|f|$ را روی S بیابیم. اما این نیز به آسانی میسر است. در واقع از آنجایی که متغیر های x, y جدای از هم می باشند کافیست صورت کسر را به ماگزیمم خود رسانده و قدر مطلق مخرج را به مینیمم خود. با انجام این کار در نهایت بدست می آوریم $M = \frac{16}{9}$. در واقع $|f(1, \frac{1}{2})| = \frac{16}{9}$. حال داریم:

$$A = \min\{1, \frac{9}{32}\} = \frac{9}{32}$$

پس جواب معادله مذکور در بازه $x \in [-\frac{9}{32}, \frac{9}{32}]$ معتبر است (البته میتوان این بازه را بزرگتر نیز نمود و صرفا مطمئن هستیم که جواب به ازای چنین x هایی تعریف شده است).

- ب) با بازنویسی معادله مذکور داریم:

$$(3y^2 - 4)dy = 3x^2dx$$

و با انتگرال گیری از طرفین داریم:

$$\int_{۰}^{y(x)} (۳\gamma^{۲} - ۴)d\gamma = \int_{۱}^{x} ۳\delta^{۲}d\delta$$

در نتیجه:

$$(y(x))^{۳} - ۴y(x) = x^{۳} - ۱$$

و در نتیجه x, y توسط رابطه ضمنی زیر با یکدیگر در ارتباط هستند:

$$y^{۳} - ۴y + ۱ - x^{۳} = ۰$$

و اگر طرف چپ تساوی فوق را با $H(x, y)$ نمایش دهیم آنگاه از آنجایی که :

$$\frac{\partial H}{\partial y}(۱, ۰) = -۴ \neq ۰$$

قضیه تابع ضمنی نتیجه خواهد داد که y برحسب x بطور یکتا توسط معادله بالا در همسایگی به قدر کافی کوچکی از $x_{۰} = ۱$ استخراج می شود.

اکنون به فرم اصلی معادله بر میگردیم:

$$y^{'} = \frac{۳x^{۲}}{۳y^{۲} - ۴} = f(x, y)$$

همچنین در این مسئله داریم $(x_{۰}, y_{۰}) = (۱, ۰)$. تابع f روی مستطیل :

$$S = \{(x, y) : |x - ۱| \leq ۱ \quad , \quad |y| \leq ۱\}$$

پیوسته است و از آنجایی که مشتق جزئی f نسبت به y روی S پیوسته و در نتیجه کراندار است با استدلال هایی مانند قضیه مقدار میانگین نتیجه می شود که f روی S در شرط لیپشیتز نسبت به y صدق میکند. اکنون ماگزیمم $|f|$ را روی S پیدا میکنیم. اما همانند قسمت قبل پیدا کردن این ماگزیمم کار آسانی است. در واقع $M = ۱۲$ و $|f(۲, ۱)| = ۱۲$. اکنون داریم:

$$A = \min\{۱, \frac{۱}{۱۲}\} = \frac{۱}{۱۲}$$

پس طبق قضیه بیان شده مطمئن هستیم که جواب (یکتای) مسئله مقدار اولیه داده شده به ازای x هایی که در بازه $[۱ - \frac{۱}{۱۲}, ۱ + \frac{۱}{۱۲}]$ قرار دارند تعریف می شود. پس یک دامنه تعریف جواب بازه :

$$[\frac{۱۱}{۱۲}, \frac{۱۳}{۱۲}]$$

می باشد. البته این دامنه ممکن است بزرگترین دامنه ممکن نباشد و احتمالا می توان آن را بزرگتر نمود.

سوال ۱۲ بدون حل کردن مسئله بازه ای که جواب در آن موجود است را مشخص کنید.

- الف)

$$y' + (\tan t)y = \sin t \quad , \quad y(\pi) = 0$$

- ب)

$$(\ln t)y' + y = \cot t \quad , \quad y(2) = 3$$

پاسخ قبل از پاسخ به سوال یادآوری میکنیم که از اثبات قضیه وجود و یکتایی پیکارد نتیجه می شود که جواب مسئله مقدار اولیه خطی:

$$X' = A(t)X + g(t) \quad , \quad X(t_0) = X_0$$

بسته به آنکه A, g در چه بازه ای پیوسته می مانند در همان بازه پیوستگی A, g موجود می باشد.

- الف) تابع $\sin t$ همه جا پیوسته است و بازه های پیوستگی تابع $\tan t$ به فرم $(\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+3}{2}\pi)$ می باشند که در آن k عددی صحیح و نامنفی است. با توجه به اینکه لحظه شروع جواب از لحظه $t_0 = \pi$ می باشد نتیجه می شود که بزرگترین بازه ای که جواب در آن موجود است (جوابی که در تمام نقاط مشتق پذیر باشد) عبارت است از بازه $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
- ب) تابع $\ln t$ برای تمامی مقادیر مثبت t تعریف شده و پیوسته می باشد و البته $\ln 1 = 0$ و برای تمامی $t > 1$ داریم $\ln t \neq 0$. همچنین بازه هایی که در آنها تابع $\cot t$ پیوسته می باشد عبارتند از $(k\pi, (k+1)\pi)$ که در آن k عددی صحیح و نامنفی می باشد. با توجه به اینکه نقطه شروع جواب نقطه $t_0 = 2$ می باشد نتیجه می شود که بزرگترین بازه ای که مسئله دارای جواب هموار می باشد عبارت است از بازه $(1, \pi)$.

سوال ۱۳ شرط لازم و کافی برای آنکه معادله زیر کامل باشد را بیابید.

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)dx + (Dx^2 + Exy + Fy^2)dy = 0$$

پاسخ قرار می دهیم:

$$P(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 \quad , \quad Q(x, y) = Dx^2 + Exy + Fy^2$$

بنابراین معادله مذکور کامل می باشد هرگاه تساوی زیر رخ دهد:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

با محاسبه مشتقات جزئی نتیجه میشود که معادله مذکور کامل است هرگاه تساوی زیر رخ دهد:

$$\mathrm{Bx} + ۲\mathrm{Cy} = ۲\mathrm{Dx} + \mathrm{Ey} \Rightarrow (\mathrm{B} - ۲\mathrm{D})\mathrm{x} + (۲\mathrm{C} - \mathrm{E})\mathrm{y} \equiv ۰$$

و در نتیجه معادله مذکور کامل است هرگاه تساوی های زیر برقرار باشند:

$$\mathrm{B} = ۲\mathrm{D} \quad , \quad \mathrm{E} = ۲\mathrm{C}$$

سوال ۱۴ مسئله مقدار اولیه زیر را حل کرده و در مورد پیوستگی جواب و مشتق بحث کنید.

$$\mathrm{y}' + ۲\mathrm{y} = \mathrm{g(t)} \quad , \quad \mathrm{y(۰)} = ۰$$

بطوریکه

$$\mathrm{g(t)} = \begin{cases} ۱ & ۰ \leq \mathrm{t} \leq ۱ \\ ۰ & \mathrm{t} > ۱ \end{cases}$$

پاسخ ابتدا روی بازه $[۰,۱]$ معادله $\mathrm{y}' + ۲\mathrm{y} = ۱$ را با شرط اولیه $\mathrm{y(۰)} = ۰$ حل می کنیم. عامل انتگرال ساز معادله اخیر عبارت است از $\mu(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}$. با ضرب μ در طرفین معادله داریم:

$$\mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}\mathrm{y}' + ۲\mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}\mathrm{y} = \mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}$$

و در نتیجه:

$$(\mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}\mathrm{y})' = \mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}$$

حال روی بازه $[۰,\mathrm{t}]$ از طرفین انتگرال میگیریم. با توجه با اینکه $\mathrm{y(۰)} = ۰$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{e}^{۲\mathrm{t}}\mathrm{y(t)} = \frac{۱}{۲}(\mathrm{e}^{۲\mathrm{t}} - ۱)$$

و در نتیجه روی بازه $[۰,۱]$ خواهیم داشت:

$$\mathrm{y(t)} = \frac{۱}{۲}(۱ - \mathrm{e}^{-۲\mathrm{t}})$$

همچنین جواب های معادله $\mathrm{y}' + ۲\mathrm{y} = ۰$ عبارتند از $\mathrm{ce}^{-۲\mathrm{t}}$ که در آن c عددی ثابت می باشد. پس اگر جواب ها را به دید توابعی نگاه کنیم که ممکن است در نقاطی (که البته در این مثال فقط یک نقطه مد نظر است) ناپیوسته باشند آنگاه صورت کلی جواب های معادله مذکور عبارت می شود از:

$$\mathrm{y_c(t)} = \begin{cases} \frac{۱}{۲}(۱ - \mathrm{e}^{-۲\mathrm{t}}) & ۰ \leq \mathrm{t} \leq ۱ \\ \mathrm{ce}^{-۲\mathrm{t}} & \mathrm{t} > ۱ \end{cases}$$

که در آن c عدد حقیقی دلخواهی است. اکنون c را به قسمی می یابیم که y_c پیوسته باشد. بدین منظور باید c را از تساوی زیر استخراج کنیم:

$$ce^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

پس در میان تمامی جواب های y_c فقط جواب y_{c_0} پیوسته می باشد که در آن:

$$c_0 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$$

اکنون مشتق ضابطه اول y_{c_0} در $t = 1$ برابر میشود با e^{-2} و مشتق ضابطه دوم y_{c_0} نیز در نقطه $t = 1$ برابر میشود با $1 - e^{-2}$.
پس y_{c_0} در $t = 1$ مشتق پذیر نمی باشد.
پس اگر بخواهیم یک جمع بندی کلی انجام دهیم در میان تمام جواب های y_c فقط جواب y_{c_0} پیوسته است که این جواب در نقطه $t = 1$ مشتق پذیر نمی باشد.

سوال ۱۵ معادلات دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیر های داده شده حل کنید.

- الف)

$$xy^2(xy' + y) = 4 \quad , \quad xy = t$$

- ب)

$$(xy + 2xy\ln^2 y + y\ln y)dx + (2x^2\ln y + x)dy = 0 \quad , \quad x\ln y = t$$

پاسخ
- الف) اگر $t(x) = xy(x)$ آنگاه $t' = xy' + y$ و در نتیجه معادله مذکور را میتوان بدین صورت نوشت:

$$\frac{t^2t'}{x} = 4 \Rightarrow 3t^2t' = 12x \Rightarrow t^3 = 6x^2 + C$$

که در آن C عددی ثابت می باشد. در نتیجه جواب عمومی معادله مذکور بطور ضمنی توسط رابطه زیر بیان می شود:

$$x^3y^3 = 6x^2 + C$$

که در آن C عددی ثابت است.

- ب) اگر $t(x) = x\ln y(x)$ آنگاه $y = e^{\frac{t}{x}}$ و:

$$t' = \ln y + \frac{xy'}{y} = \frac{t}{x} + \frac{xy'}{y}$$

اکنون طرفین معادله را بر ydx تقسیم میکنیم و در نتیجه:

$$(x+2x\ln^2 y+\ln y)+(2x^2\ln y+x)\frac{y'}{y}=0$$

با جایگذاری روابط بدست آمده معادله را بر حسب متغیر های t, x بازنویسی میکنیم:

$$(x+\frac{2t^2}{x}+\frac{t}{x})+(2t+1)(t'-\frac{t}{x})=0$$

با ساده کردن رابطه اخیر نتیجه میگیریم که:

$$x+2tt'+t'=0$$

و در نتیجه:

$$t^2+t+\frac{x^2}{2}=C$$

که در آن C عددی ثابت است. در نتیجه جواب عمومی معادله عبارت می شود از:

$$x^2\ln^2 y+x\ln y+\frac{x^2}{2}=C$$

که در آن C عددی ثابت است.

سوال ۱۶ معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

نشان دهید اگر تابع یک متغیره f ای موجود باشد که در رابطه زیر صدق کند

$$\frac{1}{yQ-xP}(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})=f(xy)$$

آنگاه معادله دیفرانسیل فوق دارای فاکتور انتگرال به فرم زیر است:

$$F(x,y)=\exp(\int_a^{xy}f(z)dz)$$

که در آن a عددی ثابت و دلخواه است.

پاسخ کافیست نشان دهیم که اگر معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیریم:

$$F(x,y)P(x,y)dx+F(x,y)Q(x,y)dy=0$$

آنگاه این معادله کامل می باشد.

بدین منظور قرار می دهیم $P_1(x,y) = F(x,y)P(x,y)$ و $Q_1(x,y) = F(x,y)Q(x,y)$. بنابراین برای بررسی کامل بودن معادله اخیر باید صحت تساوی زیر مورد بررسی قرار گیرد:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$$

قبل از بررسی درستی این تساوی ابتدا لازم میبینیم که تساوی بیان شده در فرض مسئله را باز نویسی کنیم. در واقع تساوی بیان شده در فرض مسئله را می توان بدین صورت نیز نمایش داد:

$$f(xy)yQ + \frac{\partial Q}{\partial x} = f(xy)xP + \frac{\partial P}{\partial y} \tag{1}$$

حال داریم:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}P(x,y) + F(x,y)\frac{\partial P}{\partial y} = xf(xy)F(x,y)P(x,y) + F(x,y)\frac{\partial P}{\partial y}$$

و در نتیجه:

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = F(x,y)(xf(xy)P(x,y) + \frac{\partial P}{\partial y}) \tag{2}$$

همچنین:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}Q(x,y) + F(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x} = yf(xy)F(x,y)Q(x,y) + F(x,y)\frac{\partial Q}{\partial x}$$

و در نتیجه:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = F(x,y)(yf(xy)Q(x,y) + \frac{\partial Q}{\partial x}) \tag{3}$$

اکنون اگر طرفین تساوی (۱) را در $F(x,y)$ ضرب کنیم آنچه که در طرفین تساوی بدست می آید چیزی نیست جز آنهایی که در تساوی های (۲) و (۳) حاصل شده می باشند و در نتیجه (۳) = (۲). پس $F(x,y)$ یک عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل مذکور در مسئله می باشد.