بسمه تعالی

پاسخنامه سری سوم تمارین

درس معادلات دیفرانسیل

اردیبهشت ۹۹

سوال ۱ جواب عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را بدست آورید.

- الف)

$$X' = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^{t} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

- ب)

$$X' = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

- ج)

$$X' = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^{-۲t} \\ -۲e^{t} \end{bmatrix}$$

- د)

$$X' = \begin{bmatrix} -۳ & \sqrt{۲} \\ \sqrt{۲} & -۲ \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$$

پاسخ قبل از حل سوال ابتدا لازم می بینیم که مسئله ۷ را مرور کنیم. در این مسئله میبینیم که برای ماتریس ثابت مربعی A و ماتریس ستونی g با درایه های پیوسته جواب (یکتای) مسئله مقدار اولیه :

$$X' = AX + g(t) \quad , \quad X(\circ) = X_\circ$$

توسط رابطه زیر بدست می آید:

$$X(t) = \exp(At)X_\circ + \int_\circ^t \exp(A(t-s))g(s)ds$$

در تمامی قسمت های مسئله فرض میکنیم $X(\circ) = X_\circ = \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix}$ یک ماتریس ثابت است.

- الف) در قسمت دوم تمرین شماره یک از سری دوم تمارین رابطه زیر را بدست آورده ایم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} t) = \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۳e^{t} - e^{-t} & -e^{t} + e^{-t} \\ ۳e^{t} - ۳e^{-t} & -e^{t} + ۳e^{-t} \end{bmatrix}$$

در نتیجه از آنجایی که در این مسئله داریم $g(t)=\begin{bmatrix} e^t \\ ۱ \end{bmatrix}$ بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}(t-s))g(s)=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳e^{t-s}-e^{-t+s} & -e^{t-s}+e^{-t+s} \\ ۳e^{t-s}-۳e^{-t+s} & -e^{t-s}+۳e^{-t+s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^s \\ ۱ \end{bmatrix}$$

و در نهایت:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}(t-s))g(s)=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳e^{t}-e^{-t+۲s}-e^{t-s}+e^{-t+s} \\ ۳e^{t}-۳e^{-t+۲s}-e^{t-s}+۳e^{-t+s} \end{bmatrix}$$

و در نهایت جواب دستگاه مذکور توسط رابطه زیر داده می شود:

$$X(t)=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+e^{-t} \\ ۳e^{t}-۳e^{-t} & -e^{t}+۳e^{-t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix}+\int_{۰}^{t}\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳e^{t}-e^{-t+۲s}-e^{t-s}+e^{-t+s} \\ ۳e^{t}-۳e^{-t+۲s}-e^{t-s}+۳e^{-t+s} \end{bmatrix}ds$$

با اعمال انتگرال گیری بر تک تک درایه ها و کمی عملیات جبری در نهایت جواب دستگاه مذکور برابر می شود

با:

$$X(t)=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳te^{t}+(۳a_۱-a_۲-\frac{۳}{۲})e^{t}+(-a_۱+a_۲-\frac{۱}{۲})e^{-t}+۲ \\ ۳te^{t}+(۳a_۱-a_۲-\frac{۵}{۲})e^{t}+(-۳a_۱+۳a_۲-\frac{۳}{۲})e^{-t}+۴ \end{bmatrix}$$

- ب) مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ برابر هستند با $\lambda_۱,\lambda_۲=۲\pm\sqrt{۵}i$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱=۲+\sqrt{۵}i$ برابر است با $Y_۱=\begin{bmatrix} \sqrt{۵}i \\ ۱ \end{bmatrix}$ و در نتیجه یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲=۲-\sqrt{۵}i$ برابر است با $Y_۲=\begin{bmatrix} -\sqrt{۵}i \\ ۱ \end{bmatrix}$ در نتیجه رابطه زیر را داریم:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{۵}i & -\sqrt{۵}i \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲+\sqrt{۵}i & ۰ \\ ۰ & ۲-\sqrt{۵}i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۵}i & -\sqrt{۵}i \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}=\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}t)=\begin{bmatrix} \sqrt{۵}i & -\sqrt{۵}i \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_۱ t} & ۰ \\ ۰ & e^{\lambda_۲ t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{۵}i & -\sqrt{۵}i \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱}$$

با انجام ضرب ماتریسی فوق در نهایت بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}t)=\begin{bmatrix} e^{۲t}\cos\sqrt{۵}t & -\sqrt{۵}e^{۲t}\sin\sqrt{۵}t \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}}e^{۲t}\sin\sqrt{۵}t & e^{۲t}\cos\sqrt{۵}t \end{bmatrix}$$

و با توجه به اینکه در این سوال داریم $g(t)=\begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$ نتیجه می شود که :

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}(t-s))g(s)=\begin{bmatrix} e^{۲t-۲s}\cos\sqrt{۵}(t-s) & -\sqrt{۵}e^{۲t-۲s}\sin\sqrt{۵}(t-s) \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}}e^{۲t-۲s}\sin\sqrt{۵}(t-s) & e^{۲t-۲s}\cos\sqrt{۵}(t-s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\cos s \\ \sin s \end{bmatrix}$$

و در نتیجه :

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}(t-s))g(s) = \begin{bmatrix} -e^{۲t-۲s}\cos\sqrt{۵}(t-s)\cos s - \sqrt{۵}e^{۲t-۲s}\sin\sqrt{۵}(t-s)\sin s \\ -\frac{۱}{\sqrt{۵}}e^{۲t-۲s}\sin\sqrt{۵}(t-s)\cos s + e^{۲t-۲s}\cos\sqrt{۵}(t-s)\sin s \end{bmatrix}$$

پس جواب دستگاه مذکور عبارت است از:

$$X(t) = \begin{bmatrix} e^{۲t}\cos\sqrt{۵}t & -\sqrt{۵}e^{۲t}\sin\sqrt{۵}t \\ \frac{۱}{\sqrt{۵}}e^{۲t}\sin\sqrt{۵}t & e^{۲t}\cos\sqrt{۵}t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix}$$
$$+\int_۰^t \begin{bmatrix} -e^{۲t-۲s}\cos\sqrt{۵}(t-s)\cos s - \sqrt{۵}e^{۲t-۲s}\sin\sqrt{۵}(t-s)\sin s \\ -\frac{۱}{\sqrt{۵}}e^{۲t-۲s}\sin\sqrt{۵}(t-s)\cos s + e^{۲t-۲s}\cos\sqrt{۵}(t-s)\sin s \end{bmatrix} ds$$

و در نهایت جواب دستگاه مذکور عبارت می شود از :

$$X(t) = \begin{bmatrix} a_۱e^{۲t}\cos\sqrt{۵}t + (-\sqrt{۵}a_۲ - \frac{۱}{۲\sqrt{۵}})e^{۲t}\sin\sqrt{۵}t - \frac{۱}{۲}\sin t \\ (a_۲ + \frac{۱}{۱۰})e^{۲t}\cos\sqrt{۵}t + \frac{۱}{\sqrt{۵}}a_۱e^{۲t}\sin\sqrt{۵}t - \frac{۱}{۱۰}\cos t - \frac{۱}{۵}\sin t \end{bmatrix}$$

از آنجایی که در حل این سوال با انتگرال های نسبتا پیچیده ای رو به رو می شوید پیشنهاد می شود روابط زیر را به خاطر داشته باشید:

$$\int_۰^t e^{as}\sin bs ds = \frac{ae^{at}\sin bt - be^{at}\cos bt}{a^۲ + b^۲} + \frac{b}{a^۲ + b^۲}$$
$$\int_۰^t e^{as}\cos bs ds = \frac{be^{at}\sin bt + ae^{at}\cos bt}{a^۲ + b^۲} - \frac{a}{a^۲ + b^۲}$$

همچنین دانستن روابط مثلثاتی زیر نیز می تواند مفید واقع شود:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{۱}{۲}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta))$$

- ج) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_۱ = ۲, \lambda_۲ = -۳$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۲$ برابر است با $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۳$ عبارت است از $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix}$

اکنون :

$$\exp(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۴ & -۲ \end{bmatrix}t) = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{۲t} & ۰ \\ ۰ & e^{-۳t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}^{-۱}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix}$$

و از آنجایی که داریم $g(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -2e^{t} \end{bmatrix}$ نتیجه می شود که:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} (t-s))g(s) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t-2s} + e^{-3t+3s} & e^{2t-2s} - e^{-3t+3s} \\ 4e^{2t-2s} - 4e^{-3t+3s} & e^{2t-2s} + 4e^{-3t+3s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2s} \\ -2e^{s} \end{bmatrix}$$

و در نتیجه :

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} (t-s))g(s) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t-4s} + e^{-3t+s} - 2e^{2t-s} + 2e^{-3t+4s} \\ 4e^{2t-4s} - 4e^{-3t+s} - 2e^{2t-s} - 8e^{-3t+4s} \end{bmatrix}$$

اکنون با استفاده از رابطه بیان شده در یادآوری جواب دستگاه مذکور را بدست می آوریم:

$$X(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t} + e^{-3t} & e^{2t} - e^{-3t} \\ 4e^{2t} - 4e^{-3t} & e^{2t} + 4e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \int_0^t \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4e^{2t-4s} + e^{-3t+s} - 2e^{2t-s} + 2e^{-3t+4s} \\ 4e^{2t-4s} - 4e^{-3t+s} - 2e^{2t-s} - 8e^{-3t+4s} \end{bmatrix} ds$$

و در آخر جواب دستگاه برابر می شود با :

$$X(t) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (4a_1 + a_2 - 1)e^{2t} + (a_1 - a_2 - \frac{3}{2})e^{-3t} + \frac{5}{2}e^{t} \\ (4a_1 + a_2 - 1)e^{2t} + (-4a_1 + 4a_2 + 6)e^{-3t} - 5e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- د) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -4$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = -1$ عبارت است از $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = -4$ عبارت است از $Y_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$. در نتیجه :

$$\exp(\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

و در نهایت داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} e^{-t} + 2e^{-4t} & \sqrt{2}e^{-t} - \sqrt{2}e^{-4t} \\ \sqrt{2}e^{-t} - \sqrt{2}e^{-4t} & 2e^{-t} + e^{-4t} \end{bmatrix}$$

و با توجه به اینکه $g(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ نتیجه میگیریم :

$$\exp(\begin{bmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{bmatrix} (t-s))g(s) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (1-\sqrt{2})e^{-t} + (2+\sqrt{2})e^{-4t+3s} \\ (\sqrt{2}-2)e^{-t} - (1+\sqrt{2})e^{-4t+3s} \end{bmatrix}$$

جواب دستگاه مذکور عبارت است از:

$$X(t) = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} e^{-t} + ۲e^{-۴t} & \sqrt{۲}e^{-t} - \sqrt{۲}e^{-۴t} \\ \sqrt{۲}e^{-t} - \sqrt{۲}e^{-۴t} & ۲e^{-t} + e^{-۴t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \end{bmatrix} + \int_{۰}^{t} \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} (۱-\sqrt{۲})e^{-t} + (۲+\sqrt{۲})e^{-۴t+۳s} \\ (\sqrt{۲}-۲)e^{-t} - (۱+\sqrt{۲})e^{-۴t+۳s} \end{bmatrix} ds$$

با محاسبات در نهایت جواب دستگاه مذکور عبارت می شود از:

$$X(t) = \frac{۱}{۳}\begin{bmatrix} (۱-\sqrt{۲})te^{-t} + (a_۱ + \sqrt{۲}a_۲ + \frac{۲+\sqrt{۲}}{۳})e^{-t} + (۲a_۱ - \sqrt{۲}a_۲ - \frac{۲+\sqrt{۲}}{۳})e^{-۴t} \\ (\sqrt{۲}-۲)te^{-t} + (\sqrt{۲}a_۱ + ۲a_۲ - \frac{۱+\sqrt{۲}}{۳})e^{-t} + (-\sqrt{۲}a_۱ + a_۲ + \frac{۱+\sqrt{۲}}{۳})e^{-۴t} \end{bmatrix}$$

سوال ۲ هر کدام از معادلات دیفرانسیل زیر را به دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه اول تبدیل کنید.

- الف)

$$u'' + \frac{۱}{۲}u' + ۲u = ۳\sin t$$

- ب)

$$t^۲u'' + tu' + (t^۲ - \frac{۱}{۴})u = ۰$$

- ج)

$$u^{(۴)} - u = ۰$$

پاسخ

- الف) قرار می دهیم $u = x_۱, u' = x_۲$. در نتیجه $x_۱' = x_۲$ و :

$$x_۲' = u'' = -\frac{۱}{۲}x_۲ - ۲x_۱ + ۳\sin t$$

در نتیجه دستگاه خطی متناظر با معادله از مرتبه دوم مذکور عبارت می شود از:

$$\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۲ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳\sin t \end{bmatrix}$$

- ب) قرار می دهیم $u = x_۱, u' = x_۲$. در نتیجه $x_۱' = x_۲$ و در نتیجه $t^۲x_۱' = t^۲x_۲$ و همچنین:

$$t^۲x_۲' + tx_۲ + (t^۲ - \frac{۱}{۴})x_۱ = ۰$$

در نتیجه سیستم خطی متناظر با معادله مرتبه دوم مذکور عبارت است از:

$$t^۲\begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} ۰ & t^۲ \\ -t^۲ + \frac{۱}{۴} & -t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

- ج) قرار دهید $u = x_1, u' = x_2, u'' = x_3, u''' = x_4$. در نتیجه:

$$x_1' = x_2 \quad , \quad x_2' = x_3 \quad , \quad x_3' = x_4 \quad , \quad x_4' = x_1$$

در نتیجه سیستم متناظر با معادله مذکور از مرتبه چهار عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

سوال ۳ فرض کنید $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ اعدادی ثابت هستند بطوریکه a_{12}, a_{21} با هم صفر نیستند. همچنین g_1, g_2 توابعی مشتق پذیرند. نشان دهید دستگاه زیر قابل تبدیل به یک معادله درجه دوم با شرایط اولیه است:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t) \quad , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t) \quad , \quad x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

پاسخ ابتدا با جایگذاری $t = 0$ در طرفین دو معادله بالا بدست می آوریم:

$$\begin{cases} x_1'(0) = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + g_1(0) \\ x_2'(0) = a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + g_2(0) \end{cases}$$

حال ابتدا فرض کنید $a_{12} \neq 0$. ابتدا از طرفین اولین معادله مشتق میگیریم:

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + g_1'(t)$$

در طرف راست معادله بدست آمده بجای عبارت x_2' عبارت تساوی آن را از معادله دوم جایگذاری میکنیم. داریم:

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t)) + g_1'(t)$$

و در نتیجه:

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}a_{21}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 + a_{12}g_2(t) + g_1'(t)$$

حال استنتاج زیر را داریم:

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t) \Rightarrow x_2 = \frac{1}{a_{12}}(x_1' - a_{11}x_1 - g_1(t))$$

با جایگذاری x_2 در معادله قبلی بدست می آوریم:

$$x_1'' = a_{11}x_1' + a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}(x_1' - a_{11}x_1 - g_1(t)) + a_{12}g_2(t) + g_1'(t)$$

و در نتیجه:

$$x_1'' = (a_{11} + a_{22})x_1' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_1 - a_{22}g_1(t) + a_{12}g_2(t) + g_1'(t)$$

پس x_1 در مسئله مقدار اولیه زیر صدق می کند:

$$\begin{cases} x_1'' = (a_{11} + a_{22})x_1' + (a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22})x_1 - a_{22}g_1(t) + a_{12}g_2(t) + g_1'(t) \\ x_1(0) = x_1^0 \\ x_1'(0) = a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + g_1(0) \end{cases}$$

این مسئله دارای جواب یکتایی است که آن را با همان x_1 نمایش می دهیم و با استفاده از رابطه:

$$x_2 = \frac{1}{a_{12}}(x_1' - a_{11}x_1 - g_1(t))$$

میتوان x_2 را نیز حاصل نمود.

حال فرض کنید $a_{21} \neq 0$. با مشتق گیری از معادله دوم و جایگذاری معادله اول در آن داریم:

$$x_2'' = a_{21}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + g_1(t)) + a_{22}x_2' + g_2'(t)$$

و در نتیجه:

$$x_2'' = a_{21}a_{11}x_1 + a_{21}a_{12}x_2 + a_{21}g_1(t) + a_{22}x_2' + g_2'(t)$$

حال استنتاج زیر را داریم:

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + g_2(t) \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a_{21}}(x_2' - a_{22}x_2 - g_2(t))$$

با جایگذاری در معادله قبلی بدست می آوریم:

$$x_2'' = a_{11}(x_2' - a_{22}x_2 - g_2(t)) + a_{21}a_{12}x_2 + a_{21}g_1(t) + a_{22}x_2' + g_2'(t)$$

و در نهایت:

$$x_2'' = (a_{11} + a_{22})x_2' + (a_{21}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 - a_{11}g_2(t) + a_{21}g_1(t) + g_2'(t)$$

پس x_2 در مسئله مقدار اولیه زیر صدق میکند:

$$\begin{cases} x_2'' = (a_{11} + a_{22})x_2' + (a_{21}a_{21} - a_{11}a_{22})x_2 - a_{11}g_2(t) + a_{21}g_1(t) + g_2'(t) \\ \\ x_2(0) = x_2^0 \\ \\ x_2'(0) = a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + g_2(0) \end{cases}$$

این مسئله دارای جواب یکتایی است که آن را با همان x_2 نمایش می دهیم. در نهایت با استفاده از رابطه:

$$x_1 = \frac{1}{a_{21}}(x_2' - a_{22}x_2 - g_2(t))$$

می توان x_1 را نیز بدست آورد.

سوال ۴ فرض کنید $x_1 = y, x_2 = y'$ و در نتیجه معادله درجه دوم زیر:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

معادل با دستگاه زیر است:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{cases}$$

نشان دهید اگر X^1, X^2 یک جواب اساسی دستگاه بالا و y^1, y^2 یک جواب اساسی معادله درجه دوم مذکور باشد آنگاه به ازای ثابتی غیر صفر مانند c داریم:

$$W[y^1, y^2] = cW[X^1, X^2]$$

یادآوری میکنیم که رونسکین دو تابع مشتق پذیر y^1, y^2 توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$W[y^1, y^2](t) := \det \begin{bmatrix} y^1(t) & y^2(t) \\ (y^1(t))' & (y^2(t))' \end{bmatrix}$$

و برای دو تابع برداری X^1, X^2 که بردار هایی ستونی از بعد ۲ می باشند نیز رونسکین X^1, X^2 بصورت زیر تعریف می شود:

$$W[X^1, X^2](t) = \det [X^1(t)|X^2(t)]$$

که منظور از ماتریس سمت راست ماتریسی است که بر اثر قرار دادن ستون های X^1, X^2 در کنار هم ایجاد شده است.

پاسخ ابتدا مطالبی را یادآوری میکنیم. فرض کنید $A(t)$ ماتریسی مربعی باشد که درایه های آن بطور پیوسته نسبت به پارامتر t تغییر میکنند. همچنین فرض کنید B_0 یک ماتریس مربعی وارون پذیر ثابت هم بعد با $A(t)$ باشد. از گزاره های وجود و

یکتایی نتیجه می شود که ماتریس اساسی برای دستگاه $X' = A(t)X$ با شرط اولیه $X(0) = B_0$ وجود دارد (و در واقع منحصر بفرد نیز می باشد).

اکنون به یک مشاهده می پردازیم. فرض کنید $Y(t)$ یک ماتریس اساسی دلخواه برای سیستم $X' = A(t)X$ باشد و فرض کنید C_0 یک ماتریس وارون پذیر ثابت باشد. نشان می دهیم $Y(t)C_0$ نیز یک ماتریس اساسی سیستم $X' = A(t)X$ می باشد. چرا که:

$$(Y(t)C_0)' = Y'(t)C_0 = A(t)Y(t)C_0 = A(t)(Y(t)C_0)$$

فرض کنید $X_1(t), X_2(t)$ دو ماتریس اساسی برای سیستم $X' = A(t)X$ باشند و در شرایط $X_1(0) = B_1, X_2(0) = B_2$ صدق کنند که در آن B_1, B_2 ماتریس هایی وارون پذیر و ثابت می باشند. میخواهیم ببینیم که X_1, X_2 چه ارتباطی با هم دارند. طبق نوشته های اخیر نتیجه می شود که $X_1(t)B_1^{-1}B_2$ یک ماتریس اساسی برای سیستم $X' = A(t)X$ است که در $t = 0$ برابر با B_2 می شود. طبق یکتایی لزوما باید داشته باشیم:

$$X_2(t) = X_1(t)B_1^{-1}B_2$$

و اگر قرار دهیم $C = B_1^{-1}B_2$ نتیجه می شود که به ازای ماتریس وارون پذیر ثابتی مانند C رابطه زیر بین X_1, X_2 برقرار خواهد بود:

$$X_2(t) = X_1(t)C$$

از این نتیجه برای حل سوال چهار استفاده میکنیم.

حال فرض کنید $p(t), q(t)$ توابعی پیوسته از t باشند و y^1, y^2 یک دستگاه اساسی از جواب ها برای معادله مرتبه دوم :

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

تشکیل دهند (یعنی y^1, y^2 مستقل خطی بوده و ترکیب های خطی y^1, y^2 همه جواب های معادله درجه دوم مذکور را تولید کنند). در نتیجه بردار های ستونی :

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y^1(t) \\ (y^1(t))' \end{bmatrix} \quad , \quad Y_2(t) = \begin{bmatrix} y^2(t) \\ (y^2(t))' \end{bmatrix}$$

دو جواب مستقل خطی و در نتیجه یک دستگاه اساسی از جواب ها برای سیستم زیر می باشد:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(مستقل خطی بودن این جواب ها از مستقل خطی بودن y^1, y^2 نتیجه می شود). در نتیجه :

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y^1(t) & y^2(t) \\ (y^1(t))' & (y^2(t))' \end{bmatrix}$$

یک ماتریس اساسی برای سیستم :

$$X' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{bmatrix} X$$

می باشد. از طرفی دیگر طبق فرض سوال ماتریس $[X^1|X^2]$ نیز یک ماتریس اساسی برای همین سیستم می باشد و بنابر مطالبی که قبل از حل این سوال بیان شد نتیجه می شود که به ازای ماتریس ثابت وارون پذیری مانند C داریم:

$$\begin{bmatrix} y^1(t) & y^2(t) \\ (y^1(t))' & (y^2(t))' \end{bmatrix} = [X^1(t)|X^2(t)]C$$

با اعمال دترمینان بر طرفین نتیجه میشود که به ازای ثابتی غیر صفر مانند c داریم:

$$W[y^1, y^2] = cW[X^1, X^2]$$

سوال ۵ فرض کنید $x^1, ..., x^n$ جواب های مستقل خطی معادله $x' = Px$ باشند بطوریکه P ماتریسی مربعی از مرتبه n است که درایه های آن وابسته به متغیر t تغییر میکنند و در بازه $\alpha < t < \beta$ این درایه ها توابعی پیوسته هستند. هر جواب (ستونی) این معادله را میتوان بصورت ترکیبی خطی از ماتریس های ستونی $x^1, .., x^n$ نوشت. مثلا اگر $z(t)$ یک جواب ستونی این دستگاه باشد آنگاه به ازای اعداد ثابتی مانند $c_1, ..., c_n$ می توان نوشت:

$$z(t) = c_1x^1(t) + ... + c_nx^n(t)$$

نشان دهید در ترکیب خطی بالا ضرایب $c_1, ..., c_n$ بطور یکتا تعیین می شوند.

پاسخ اگر بخواهیم از منظر جبر خطی به سوال نگاه کنیم که جواب واضح است چرا که بردار های ستونی $x^1, .., x^n$ پایه ای برای فضای جواب های ستونی سیستم $X' = PX$ تشکیل میدهند و طبق تعریف پایه نتیجه میشود که هر جواب سیستم را می توان بصورت ترکیبی خطی از عناصر پایه نوشت که ضرایب دخیل در آن ترکیب خطی بطور منحصر بفرد تعیین می شوند.
ولی اگر بخواهیم از منظر معادلات به سوال نگاه کنیم میتوان اینطور عمل کرد: ابتدا نشان میدهیم که تساوی زیر برای هر $\alpha < t < \beta$:

$$c_1x^1(t) + ... + c_nx^n(t) = 0$$

نتیجه می دهد که $c_1 = ... = c_n = 0$.

دلیل: تساوی نوشته شده به زبان ماتریسی معادل با تساوی زیر است:

$$[x^1(t)|x^2(t)|...|x^n(t)] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ . \\ . \\ c_n \end{bmatrix} = 0$$

از طرفی از آنجایی که $x^1(t), ..., x^n(t)$ پایه ای برای جواب های سیستم $X' = PX$ می باشد نتیجه می شود که ماتریس $[x^1(t)|...|x^n(t)]$ یک ماتریس اساسی برای سیستم $X' = PX$ می باشد و در نتیجه وارون پذیر می باشد. وارون پذیری این ماتریس به همراه رابطه بالا نتیجه می دهد که $c_1 = ... = c_n = 0$.

اکنون فرض کنید جواب ستونی $z(t)$ را به دو روش زیر بصورت ترکیب خطی $x^1, ..., x^n$ نوشته ایم:

$$z(t) = c_1x^1(t) + ... + c_nx^n(t)$$

$$z(t) = d_1x^1(t) + ... + d_nx^n(t)$$

پس:

$$c_1x^1(t) + ... + c_nx^n(t) = d_1x^1(t) + ... + d_nx^n(t)$$

و در نتیجه:

$$(c_1 - d_1)x^1(t) + ... + (c_n - d_n)x^n(t) = 0$$

و با استفاده از آنچه که ابتدا بیان شد نتیجه میگیریم که $c_1 = d_1, ..., c_n = d_n$. پس ضرایب دخیل در ترکیب خطی بطور یکتا تعیین می شوند.

سوال ۶ در هرکدام از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر:

- الف) نقاط بحرانی (ایستای) دستگاه را بیابید.
- ب) دستگاه خطی متناظر با سیستم را نزدیک این نقاط بدست آورید.
- ج) مقادیر ویژه این دستگاه خطی را بدست آورده و رفتار آن را توجیه کنید (در نزدیکی هر نقطه بحرانی).
  (یعنی آن نقطه بحرانی پایدار است یا بطور مجانبی پایدار است یا ....)

• ۱)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = (۱ + x)\sin y \\ \dfrac{dy}{dt} = ۱ - x - \cos y\end{cases}$$

• ۲)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = x - x^۲ - xy \\ \dfrac{dy}{dt} = (۲ - x)(y + \frac{۱}{۲}x)\end{cases}$$

• ۳)

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -۲x - y - x(x^۲ + y^۲) \\ \dfrac{dy}{dt} = x - y + y(x^۲ + y^۲)\end{cases}$$

پاسخ ابتدا یادآوری میکنیم که در دستگاه $x' = f(x)$ که در آن x یک بردار ستونی می باشد و f تابعی پیوسته از x می باشد بردار ستونی $x_۰$ را یک نقطه بحرانی (ایستای) دستگاه مذکور می نامیم هرگاه $f(x_۰) = ۰$.

فرض کنید دستگاه دو بعدی زیر داده شده باشد و $(x_۰, y_۰)$ یک نقطه ایستای این دستگاه باشد:

$$\begin{cases}x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y)\end{cases}$$

سیستم خطی تقریب زننده دستگاه فوق حول نقطه ایستای $(x_۰, y_۰)$ عبارت می شود از:

$$\begin{bmatrix}u_۱ \\ u_۲\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_۰, y_۰) & \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_۰, y_۰) \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}(x_۰, y_۰) & \dfrac{\partial G}{\partial y}(x_۰, y_۰)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_۱ \\ u_۲\end{bmatrix}$$

که در آن $u_۱ = x - x_۰, u_۲ = y - y_۰$. البته می توان تعریف فوق را به سیستم های از بعد بالاتر نیز بطور طبیعی تعمیم داد ولی از آنجایی که در این تمرین با سیستم های دو بعدی کار میکنیم به همین یادآوری بسنده میکنیم.

با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس ضرایبی که در خطی سازی سیستم حول نقطه ایستای خود بدست می آید میتوان وضعیت پایداری آن نقطه ایستا را بررسی نمود. همچنان فرض کنید که با دستگاه های دو بعدی کار میکنیم و $r_۱, r_۲$ مقادیر ویژه ماتریس ضرایب بدست آمده باشد.

- ۱) اگر $r_۱, r_۲$ هر دو حقیقی و متمایز و هر دوی $r_۱, r_۲$ مثبت باشند نقطه ایستای ناپایدار داریم که یک گره می باشد.
- ۲) اگر $r_۱, r_۲$ هر دو حقیقی و متمایز و هر دوی $r_۱, r_۲$ منفی باشند نقطه ایستای بطور مجانبی پایدار داریم که یک گره می باشد.

- ۳) اگر r_1, r_2 هر دو حقیقی و متمایز و یکی مثبت و دیگری منفی باشد آنگاه نقطه ایستای ناپایدار داریم که یک نقطه زینی سیستم می باشد.

- ۴) اگر $r_1 = r_2$ و هر دو مثبت باشند آنگاه نقطه ایستای ناپایدار داریم که یک گره یا یک نقطه مارپیچی می باشد.

- ۵) اگر $r_1 = r_2$ و هر دو منفی باشند آنگاه نقطه ایستای بطور مجانبی پایدار داریم که یک گره یا یک نقطه مارپیچی می باشد.

- ۶) اگر r_1, r_2 مختلط (غیر حقیقی) باشند و قسمت حقیقی آنها مثبت باشد آنگاه نقطه ایستای ناپایدار داریم که یک نقطه مارپیچی می باشد.

- ۷) اگر r_1, r_2 مختلط (غیر حقیقی) با قسمت حقیقی منفی باشند آنگاه نقطه ایستای بطور مجانبی پایدار داریم که یک نقطه مارپیچی است.

- ۸) اگر r_1, r_2 موهومی محض باشند (یعنی $r_1, r_2 = \pm\lambda i$) آنگاه با استفاده از این آزمون نمی توان در مورد پایداری این نقطه ایستا تصمیم گرفت ولی این نقطه ایستا حتما یا یک نقطه مارپیچی است یا یک نقطه مرکزی.

اکنون آماده ایم که به حل سوال بپردازیم.

- ۱) نقاط بحرانی این دستگاه آن نقاط (x_0, y_0) ای هستند که در روابط زیر صدق میکنند:

$$\begin{cases} (1 + x_0)\sin y_0 = 0 \\ 1 - x_0 - \cos y_0 = 0 \end{cases}$$

با یک حساب ساده نتیجه می شود که نقاط بحرانی این سیستم عبارتند از :

$$(x_0, y_0) = (0, 2k\pi) \quad , \quad (x_0, y_0) = (2, (2k+1)\pi)$$

که در آن k عددی صحیح است.

دستگاه خطی تقریب زننده سیستم حول نقاط ایستای $(x_0, y_0) = (0, 2k\pi)$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

و دستگاه خطی تقریب زننده سیستم حول نقاط ایستای $(x_0, y_0) = (2, (2k+1)\pi)$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & -۳ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ عبارتند از $r_۱, r_۲ = \pm\sqrt{۳}$. در نتیجه نقاط ایستای $(۲, (۲k+۱)\pi)$ نقاط ناپایدار سیستم و از نوع زینی می باشند.
مقادیر ویژه ماتریس $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ عبارتند از $r_۱, r_۲ = \pm i$. در نتیجه آزمون بیان شده در مورد پایداری یا ناپایداری نقاط ایستای $(۰, ۲k\pi)$ نمی تواند تصمیم گیری کند. ولی این نقاط حتما یا یک نقطه مارپیچی سیستم هستند یا یک نقطه مرکزی از آن.

- ۲) نقاط بحرانی این دستگاه آن نقاط $(x_۰, y_۰)$ ای هستند که در روابط زیر صدق میکنند:

$$\begin{cases} x_۰ - x_۰^۲ - x_۰ y_۰ = ۰ \\ (۲ - x_۰)(y_۰ + \frac{۱}{۲}x_۰) = ۰ \end{cases}$$

میتوان به راحتی بررسی کرد که تنها نقاط بحرانی این دستگاه عبارتند از :

$$(x_۰, y_۰) = (۰, ۰) \quad , \quad (x_۰, y_۰) = (۲, -۱)$$

دستگاه خطی تقریب زننده سیستم حول مبدا عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix}$$

و از آنجایی که مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ برابر با $r_۱ = ۱, r_۲ = ۲$ می باشد نتیجه می شود که مبدا یک نقطه ایستای ناپایدار برای سیستم است که یک گره می باشد.
همچنین دستگاه خطی تقریب زننده سیستم حول نقطه $(۲, -۱)$ عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{bmatrix}$$

و واضح است که مقادیر ویژه ماتریس $B = \begin{bmatrix} -۲ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ برابرند با $r_۱ = ۰, r_۲ = -۲$. پس سیستم خطی تقریب زننده در این حالت نمی تواند اطلاعاتی در مورد این نقطه ایستا دهد.

- ۳) نقاط بحرانی این دستگاه آن نقاط $(x_۰, y_۰)$ ای هستند که در روابط زیر صدق میکنند:

$$\begin{cases} -۲x_۰ - y_۰ - x_۰(x_۰^۲ + y_۰^۲) = ۰ \\ x_۰ - y_۰ + y_۰(x_۰^۲ + y_۰^۲) = ۰ \end{cases}$$

واضح است که یک نقطه بحرانی این دستگاه نقطه $(x_\circ, y_\circ) = (\circ, \circ)$ می باشد. فرض کنید $(x_\circ, y_\circ)$ نقطه ای بحرانی غیر از مبدا باشد. بنویسید $x_\circ = r_\circ \cos\theta_\circ, y_\circ = r_\circ \sin\theta_\circ$ که $r_\circ \neq \circ$. با جایگذاری در دستگاه معادلات بالا بدست می آوریم:

$$\begin{cases} -۲\cos\theta_\circ - \sin\theta_\circ - r_\circ^۲\cos\theta_\circ = \circ \\ \\ \cos\theta_\circ - \sin\theta_\circ + r_\circ^۲\sin\theta_\circ = \circ \end{cases}$$

توجه کنید که هیچ کدام از $\cos\theta_\circ, \sin\theta_\circ$ نمیتوانند برابر با صفر باشند. اکنون از هر دو معادله عبارت $r_\circ^۲$ را بدست آورده و با یکدیگر مساوی قرار دهید و در نهایت به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{-۲\cos\theta_\circ - \sin\theta_\circ}{\cos\theta_\circ} = \frac{-\cos\theta_\circ + \sin\theta_\circ}{\sin\theta_\circ}$$

و در نهایت بدست می آوریم $\tan ۲\theta_\circ = \frac{۲}{۳}$. همچنین توجه کنید که از رابطه اول نتیجه می شود که :

$$r_\circ^۲ = -۲ - \tan\theta_\circ$$

اکنون داریم:

$$\frac{۲\tan\theta_\circ}{۱ - \tan^۲\theta_\circ} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \tan^۲\theta_\circ + ۳\tan\theta_\circ - ۱ = \circ$$

و در نتیجه:

$$\tan\theta_\circ = \frac{-۳ \pm \sqrt{۱۳}}{۲}$$

با توجه به رابطه $r_\circ^۲ = -۲ - \tan\theta_\circ$ نتیجه میگیریم که $\tan\theta_\circ$ نمیتواند مثبت باشد و در نهایت خواهیم داشت:

$$\tan\theta_\circ = \frac{-۳ - \sqrt{۱۳}}{۲} \quad , \quad r_\circ^۲ = \frac{-۱ + \sqrt{۱۳}}{۲}$$

در نتیجه علاوه بر نقطه بحرانی $(x_\circ, y_\circ) = (\circ, \circ)$ نقاطی بحرانی به صورت $(r_\circ\cos\theta, r_\circ\sin\theta)$ نیز داریم که در آن:

$$r_\circ^۲ = \frac{-۱ + \sqrt{۱۳}}{۲} \quad , \quad \tan\theta = \frac{-۳ - \sqrt{۱۳}}{۲}$$

از رابطه $\tan ۲\theta = \frac{۲}{۳}$ نتیجه می شود که ۲θ در ربع اول یا سوم صفحه قرار دارد و در نتیجه یکی از دو حالت زیر رخ می دهد: یا داریم:

$$\cos ۲\theta = \frac{۳}{\sqrt{۱۳}}, \sin ۲\theta = \frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

یا داریم:

$$\cos ۲\theta = -\frac{۳}{\sqrt{۱۳}}, \sin ۲\theta = -\frac{۲}{\sqrt{۱۳}}$$

پس نقاط ایستای دسته دوم عبارتند از دسته نقاط زیر که توسط مشخصات داده شده حاصل می شوند:

(الف): نقطه $(r_0 \cos\alpha, r_0 \sin\alpha)$ است که در آن:

$$\cos 2\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}, \sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

(ب): نقطه $(r_0 \cos\beta, r_0 \sin\beta)$ است که در آن:

$$\cos 2\beta = -\frac{3}{\sqrt{13}}, \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

و در هر دو حالت نیز داریم $r_0^2 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.(توجه کنید که α, β باید در ربع دوم و چهارم صفحه قرار داشته باشند)

حال دستگاه خطی تقریب زننده سیستم حول مبدا عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

و از آنجایی که مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ برابر با $r_1, r_2 = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$ می باشند نتیجه می شود که مبدا یک نقطه ایستای بطور مجانبی پایدار برای سیستم است که یک نقطه مارپیچی دستگاه نیز می باشد.

برای نقاط ایستای از نوع دوم بدین صورت عمل میکنیم. ابتدا برای نقطه ایستای دلخواه (x_0, y_0) سیستم خطی تقریب زننده دستگاه حول آن عبارت می شود از:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -2-3x_0^2-y_0^2 & -1-2x_0y_0 \\ 1+2x_0y_0 & -1+x_0^2+3y_0^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم $A = \begin{bmatrix} -2-3x_0^2-y_0^2 & -1-2x_0y_0 \\ 1+2x_0y_0 & -1+x_0^2+3y_0^2 \end{bmatrix}$ و اگر r_1, r_2 مقادیر ویژه A باشند آنگاه با محاسبه داریم:

$$r_1 + r_2 = -3 - 2(x_0^2 - y_0^2) \quad , \quad r_1 r_2 = 3 + x_0^2 - 5y_0^2 - 3x_0^4 - 3y_0^4 - 6x_0^2y_0^2 + 4x_0y_0$$

حال اگر (x_0, y_0) یک نقطه ایستای صادق در حالت (الف) باشد آنگاه داریم:

$$r_1 + r_2 = -6 + \frac{3}{\sqrt{13}} \quad , \quad r_1 r_2 = \frac{-20 + 3\sqrt{13}}{13}$$

و در نتیجه:

$$r_1 + r_2 < 0 \quad , \quad r_1 r_2 < 0$$

از آنجایی که $r_1r_2 < 0$ می توان به آسانی تحقیق کرد که در این حالت مقادیر ویژه حقیقی و غیر هم علامت هستند (در واقع با استفاده از اطلاعات بالا می توان معادله درجه دومی که مقادیر ویژه جواب های آن می باشد را تشکیل داد و با کمی محاسبه تحقیق کرد که مبین آن عددی مثبت است). در واقع از آنجایی که $r_1 + r_2 < 0$ نتیجه می شود که حداقل یکی از r_1 یا r_2 منفی می باشد و از آنجایی که $r_1r_2 < 0$ نتیجه می شود که r_1, r_2 غیر هم علامت هستند. پس در این حالت r_1, r_2 حقیقی و غیر هم علامت هستند و در نتیجه نقاط از نوع (الف) نقاط ایستای ناپایدار برای سیستم می باشند که نقطه زینی سیستم می باشند.

همچنین اگر (x_1, y_1) یک نقطه ایستای سیستم صادق در حالت (ب) باشد آنگاه داریم:

$$r_1 + r_2 = -\frac{3}{\sqrt{13}} \quad , \quad r_1r_2 = \frac{-184 + 16\sqrt{13}}{13}$$

و در نتیجه:

$$r_1 + r_2 < 0 \quad , \quad r_1r_2 < 0$$

مانند استدلال قبل باز می توان نتیجه گرفت که در این حالت نیز مقادیر ویژه r_1, r_2 حقیقی و غیر هم علامت می باشند. پس نقاط ایستای از نوع (ب) نیز نقاط ناپایدار سیستم می باشند که نقاط زینی دستگاه می باشند.

پس به عنوان یک جمع بندی کلی می توان گفت که مبدا یک نقطه پایدار مجانبی و مارپیچی دستگاه است و تمام نقاط ایستای غیر از مبدا برای این دستگاه نقاط ناپایدار و زینی به شمار می روند.

سوال ۷ مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} X'(t) = AX(t) + g(t) \\ X(0) = X_0 \end{cases}$$

بطوریکه A ماتریسی مربعی و ثابت است و $g(t)$ یک ماتریس ستونی وابسته به t با درایه های پیوسته نسبت به t می باشد و X_0 نیز یک ماتریس ستونی ثابت می باشد.

- الف) نشان دهید:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + \int_0^t \Phi(t-s)g(s)ds$$

که در آن Φ ماتریس اساسی دستگاه $X' = AX$ است که در شرط اولیه $\Phi(0) = I$ صدق میکند.

- ب) نشان دهید:

$$X(t) = \exp(At)X_0 + \int_0^t \exp(A(t-s))g(s)ds$$

پاسخ قبل از پاسخ دادن به سوال ابتدا یک یادآوری از ریاضی عمومی ۲ بیان میکنیم. فرض کنید $\alpha(t), \beta(t)$ توابعی مشتق پذیر بر حسب پارامتر t باشند و فرض کنید $f(t, s)$ تابعی از دو متغیر s, t و مشتق پذیر باشد. قرار میدهیم:

$$g(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, s) ds$$

و میخواهیم مشتق g را بدست بیاوریم. توجه کنید که در این وضعیت نمیتوانیم از قضایای اساسی حسابان برای محاسبه مشتق استفاده نمود چرا که خود انتگرالده به متغیر t وابسته می باشد. برای بدست آوردن مشتق g بدین صورت عمل میکنیم: ابتدا سه متغیر مستقل u, v, w را معرفی نموده و قرار می دهیم:

$$H(u, v, w) = \int_{u}^{v} f(w, s) ds$$

حال واضح است که $g(t) = H(\alpha(t), \beta(t), t)$ و با بکارگیری قاعده زنجیری مشتق g با استفاده از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$g^{'}(t) = \frac{\partial H}{\partial u}(\alpha(t), \beta(t), t)\alpha^{'}(t) + \frac{\partial H}{\partial v}(\alpha(t), \beta(t), t)\beta^{'}(t) + \frac{\partial H}{\partial w}(\alpha(t), \beta(t), t)$$

اما داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u}(\alpha(t), \beta(t), t) = -f(t, \alpha(t)) \\ \dfrac{\partial H}{\partial v}(\alpha(t), \beta(t), t) = f(t, \beta(t)) \\ \dfrac{\partial H}{\partial w}(\alpha(t), \beta(t), t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, s) ds \end{cases}$$

و در نتیجه:

$$g^{'}(t) = \beta^{'}(t) f(t, \beta(t)) - \alpha^{'}(t) f(t, \alpha(t)) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t, s) ds$$

اکنون آماده ایم که به حل بخش های این سوال بپردازیم.

- الف) از آنجایی که g پیوسته است قضیه وجود و یکتایی (در واقع صورت یکتایی این قضیه) نتیجه می دهد که مسئله مقدار اولیه ذکر شده دارای جواب یکتایی می باشد. پس کافیست بررسی کنیم که :

$$X(t) = \Phi(t) X_{\circ} + \int_{\circ}^{t} \Phi(t - s) g(s) ds$$

در مسئله مقدار اولیه مذکور صادق می باشد. ابتدا از آنجایی که $\Phi(\circ) = I$ واضح است که $X(\circ) = X_{\circ}$. همچنین داریم:

$$X^{'}(t) = \Phi^{'}(t) X_{\circ} + g(t) + \int_{\circ}^{t} (\frac{d\Phi}{dt}(t - s) g(s)) ds$$

در محاسبه مشتق جمله انتگرالی از همان رابطه ای که در قسمت یادآوری بدست آوردیم استفاده شده است. اکنون $\Phi(t)$ یک ماتریس اساسی دستگاه $X' = AX$ است. پس $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ و $\frac{d\Phi}{dt}(t-s) = A\Phi(t-s)$ و روابط حاصل را در رابطه اخیر جایگذاری میکنیم:

$$X'(t) = A\Phi(t)X_\circ + g(t) + \int_\circ^t A\Phi(t-s)g(s)ds$$

از آنجایی که A ماتریسی ثابت فرض شده است میتوان آن را مانند یک اسکالر از انتگرال بیرون آورد و پشت انتگرال نوشت. با بازنویسی رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$X'(t) = A(\Phi(t)X_\circ + \int_\circ^t \Phi(t-s)g(s)ds) + g(t) = AX(t) + g(t)$$

و در نتیجه $X(t)$ در مسئله مقدار اولیه مذکور صدق می کند.

- ب) این قسمت نتیجه مستقیمی از قسمت (الف) می باشد. چرا که ماتریس اساسی دستگاه $X' = AX$ که در $t = \circ$ برابر با همانی می باشد عبارت است از $\exp(At)$.