پاسخنامه سری دوم تمارین

درس معادلات دیفرانسیل

فروردین ۹۹

بسمه تعالی

سوال ۱ برای هر کدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر:

- الف) صفحه فاز آنها را مشخص کنید و چند مدار برای آنها رسم کنید.
- ب) جواب عمومی آنها را بدست آورید.
- ج) رفتار جواب ها را وقتی $t \to \infty$ توصیف کنید.

- ۱)

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} x$$

- ۲)

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x$$

- ۳)

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

- ۴)

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x$$

- ۵)

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix} x$$

- ۶)

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix} x$$

- ۷)

$$x' = \begin{bmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} x$$

پاسخ قبل از آنکه مستقیم به حل سوالات بپردازیم ابتدا مطالبی را یادآوری می کنیم.

فرض کنید A ماتریسی مربعی از مرتبه n با درایه های مختلط باشد. تعریف می کنیم:

$$\exp\mathrm{A} := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathrm{A}^{\mathrm{n}}}{n!} = \mathrm{I} + \mathrm{A} + \frac{\mathrm{A}^2}{2!} + \frac{\mathrm{A}^3}{3!} + \dots$$

حال فرض کنید A یک ماتریس مربعی از مرتبه n با درایه های مختلط باشد. مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \quad , \quad \mathrm{X}(\mathrm{t}_0) = \mathrm{X}_0$$

که در آن t_0عدد حقیقی دلخواه و X_0 می تواند ماتریسی مربعی از مرتبه n یا یک بردار ستونی n بعدی با درایه های مختلط باشد (در تمام آنچه که تا اکنون ذکر نمودیم فرض بر آن است که ماتریس A به متغیر t وابسته نیست). منظور از یک جواب برای مسئله مقدار اولیه بالا، ماتریس $\Omega(\mathrm{t})$ می باشد که از نظر تعداد سطر و ستون، هم نوع با ماتریس X_0 است و درایه های آن توابعی مشتق پذیر می باشند (که در حالت کلی، مختلط مقدار هستند) و :

$$\Omega'(\mathrm{t}) = \mathrm{A}\Omega(\mathrm{t}) \quad , \quad \Omega(\mathrm{t}_0) = \mathrm{X}_0$$

طبق گزاره های استاندارد، چنین جوابی وجود دارد و این جواب منحصر بفرد است و توسط رابطه:

$$\Omega(\mathrm{t}) = (\exp(\mathrm{A}(\mathrm{t} - \mathrm{t}_0)))\mathrm{X}_0$$

بیان می شود (توجه کنید که در رابطه اخیر، این مطلب که ماتریس A به t بستگی ندارد مهم و ضروری می باشد. در واقع اگر A وابستگی به t داشته باشد، رابطه اخیر ممکن است جوابی برای مسئله مقدار اولیه ذکر شده نباشد).

یک رابطه مفید : هرگاه P, B ماتریس های مربعی از مرتبه n باشند و P وارون پذیر باشد، آنگاه:

$$\exp(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}) = \mathrm{P}^{-1}(\exp\mathrm{B})\mathrm{P}$$

و همچنین اگر D ماتریسی قطری باشد که عناصر قطر آن به ترتیب برابر با $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ باشد آنگاه $\exp(\mathrm{D})$ نیز ماتریسی قطری می باشد که عناصر قطر آن به ترتیب برابر با $\exp(\mathrm{a}_1), \dots, \exp(\mathrm{a}_\mathrm{n})$ می باشد. پس یک راه برای بدست آوردن $\exp$ ماتریس مربعی داده شده آن است که آن ماتریس را (در صورت ممکن بودن) قطری نموده و از روابط بالا استفاده کنیم. اگر ماتریس داده شده قطری شدنی نبود، میتوانیم فرم ژردان آن (که بطور حتم وجود دارد) را بدست آورده و با استفاده از روابط بالا $\exp$ ماتریس داده شده را محاسبه کنیم.

اکنون به حل قسمت های سوال می پردازیم. در تمامی قسمت های سوال فرض میکنیم که شرط اولیه به صورت:

$$\mathrm{X}(0) = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}$$

میباشد. پس جواب باید از جنس ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ باشد.

• ۱) ابتدا سعی می کنیم که ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$ را به فرم قطری خود تبدیل کنیم. پس ابتدا باید مقادبر ویژه آن را محاسبه کنیم. داریم:

$$\det(xI - A) = \det \begin{bmatrix} x - ۱ & ۲ \\ -۳ & x + ۴ \end{bmatrix} = (x - ۱)(x + ۴) + ۶ = x^۲ + ۳x + ۲ = (x + ۱)(x + ۲)$$

پس مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_۱ = -۱, \lambda_۲ = -۲$. بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_۱ \\ -y_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_۱ - y_۲ = ۰ \\ y_۱ - y_۲ = ۰ \end{cases}$$

مشاهده می شود که بردار های ستونی به فرم $Y = \begin{bmatrix} c \\ c \end{bmatrix}$ بردار های ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = -۱$ می باشند.
همچنین برای $\lambda_۲ = -۲$ نیز داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲y_۱ \\ -۲y_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۳y_۱ - ۲y_۲ = ۰ \\ ۳y_۱ - ۲y_۲ = ۰ \end{cases}$$

و در این حالت نیز مشاهده می شود که بردارهای ستونی به فرم $Y = \begin{bmatrix} c \\ \frac{۳}{۲}c \end{bmatrix}$ بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۲$ می باشند.

اکنون بدین صورت عمل میکنیم. یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_۱ = -۱$ انتخاب میکنیم. مثلا $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_۲ = -۲$ انتخاب میکنیم. مثلا $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$ این بردار ها را بطور ستونی در ماتریسی مانند P قرار می دهیم. پس ماتریس مربعی از مرتبه ۲ زیر را بدست می آوریم:

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & \frac{۳}{۲} \end{bmatrix}$$

با یک حساب ساده رابطه زیر حاصل می شود:

$$P \begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ ۰ & -۲ \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & -۴ \end{bmatrix}$$

(البته در صورتی که ماتریس مورد نظر قطری شدنی باشد این فرآیند همیشه برقرار است و نیازی به بررسی رابطه بیان شده نمی باشد. ولی اگر مایل هستید میتوانید آن را بررسی کنید)

در نتیجه:

$$P\begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} t$$

اکنون بنابر یادآوری بیان شده جواب مسئله مقدار اولیه:

$$X' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} X \quad , \quad X(0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

برابر است با:

$$\Omega(t) = (\exp(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} t)) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اکنون داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} t) = P(\exp(\begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix}))P^{-1} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

و در نهایت:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

جواب نهایی برابر است با:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} (3a - 2c)e^{-t} + (-2a + 2c)e^{-2t} & (3b - 2d)e^{-t} + (-2b + 2d)e^{-2t} \\ (3a - 2c)e^{-t} + (-3a + 3c)e^{-2t} & (3b - 2d)e^{-t} + (-3b + 3d)e^{-2t} \end{bmatrix}$$

جواب اخیر در واقع جواب عمومی معادله مورد نظر می باشد که با اختیار نمودن شرط اولیه (بطور دلخواه) به جواب های خصوصی از معادله دست می یابیم. اگر شرط اولیه $X(0) = I$ را اتخاذ کنیم به جواب زیر خواهیم رسید:

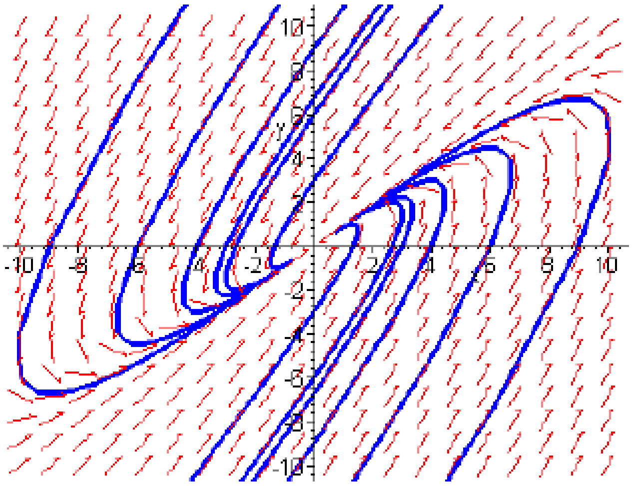
$$\Omega_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-2t} & -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

اکنون اگر جواب های معادله مذکور را از دیدگاه بردار های ستونی نگاه کنیم مشاهده می شود که ستون های ماتریس $\Omega_1(t)$ جواب های (ستونی) معادله مذکور هستند که یک پایه برای جواب های معادله ذکر شده تشکیل می دهند (در واقع اگر بجای شرط اولیه $X(0) = I$ هر شرط اولیه $X(0) = B$ اتخاذ شود که در آن ماتریس B وارون پذیر باشد باز هم تمام صحبت های اخیر درست می باشد). پس هر جواب ستونی معادله مذکور را می توان بصورت ترکیبی خطی از ستون های $\Omega_1(t)$ بیان کرد:

$$\gamma(t) = \alpha_1 \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 3e^{-t} - 3e^{-2t} \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix}$$

که در آن α_1, α_2 دو عدد ثابت هستند (وابستگی به t ندارند). امامی دانیم که وقتی $t \to \infty$ داریم $e^{-t}, e^{-2t} \to 0$.
پس ستون های $\Omega_1(t)$ به سمت بردار صفر میل می کنند و در نتیجه همه جواب های معادله مذکور به سمت صفر میل می کنند (اصطلاحا در این مواقع می گویند که صفر یک نقطه جاذب سیستم می باشد).

صفحه فاز و مدار های سیستم ذکر شده در شکل زیر نشان داده شده اند:



- ۲) همانند فرآیند قسمت (۱) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم:

$$\det(xI - A) = \det(\begin{bmatrix} x-2 & 1 \\ -3 & x+2 \end{bmatrix}) = (x-1)(x+1)$$

پس مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

حال بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بدست می آوریم. برای $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 - y_2 = 0 \\ y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

با اتخاذ یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = 1$ مثلا بردار $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ را اتخاذ میکنیم.

برای $\lambda_2 = -1$ نیز داریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ -y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1 - y_2 = 0 \\ 3y_1 - y_2 = 0 \end{cases}$$

و متناظر با $\lambda_2 = -1$ نیز بردار ویژه $Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ را اتخاذ می کنیم. همانند نکاتی که در قسمت (۱) ذکر گردید

نتیجه میگیریم که:

$$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow P\begin{bmatrix}t & 0\\ 0 & -t\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}t$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}t)=P\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

و با انجام ضرب ماتریسی بالا به رابطه زیر می رسیم:

$$\exp(\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+e^{-t}\\ 3e^{t}-3e^{-t} & -e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}$$

و در نتیجه جواب عمومی معادله ذکر شده برابر است با:

$$\Omega(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+e^{-t}\\ 3e^{t}-3e^{-t} & -e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

که برابر میشود با:

$$\Omega(t)=\begin{bmatrix}\frac{3a-c}{2}e^{t}+\frac{-a+c}{2}e^{-t} & \frac{3b-d}{2}e^{t}+\frac{-b+d}{2}e^{-t}\\ \frac{3a-c}{2}e^{t}+\frac{-3a+3c}{2}e^{-t} & \frac{3b-d}{2}e^{t}+\frac{-3b+3d}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن شرط اولیه $X(0)=I$ جواب خصوصی $\Omega_1(t)$ را حاصل میکنیم:

$$\Omega_1(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{t}-e^{-t} & -e^{t}+e^{-t}\\ 3e^{t}-3e^{-t} & -e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}$$

و در نتیجه به عنوان جواب های ستونی دو جواب :

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{2}e^{t}-\frac{1}{2}e^{-t}\\ \frac{3}{2}e^{t}-\frac{3}{2}e^{-t}\end{bmatrix}\quad,\quad\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}\\ -\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

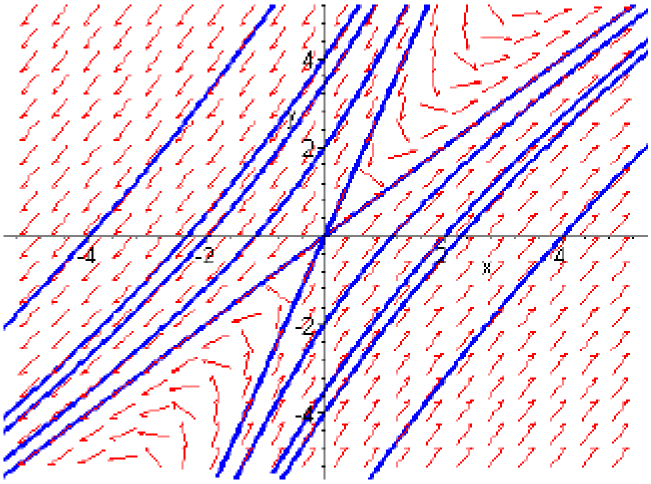
پایه ای برای جواب های دستگاه مذکور تشکیل می دهند. اگر به ضابطه $\Omega(t)$ که در بالا نوشته شده است توجه کنیم نتیجه میگیریم که فرمول کلی جواب های ستونی معادله مذکور برابر است با:

$$\gamma(t)=\begin{bmatrix}\frac{3a-c}{2}e^{t}+\frac{-a+c}{2}e^{-t}\\ \frac{3a-c}{2}e^{t}+\frac{-3a+3c}{2}e^{-t}\end{bmatrix}$$

با جایگذاری $a=c=1$ جواب $\gamma_1(t)=\begin{bmatrix}e^{t}\\ e^{t}\end{bmatrix}$ و با جایگذاری $a=1, c=3$ جواب $\gamma_2(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 3e^{-t}\end{bmatrix}$ را بدست می آوریم. وقتی $t\to\infty$ واضح است که $\gamma_1\to\infty$ و $\gamma_2\to 0$. پس بر خلاف قسمت قبل جواب هایی از این دستگاه وجود دارند که به سمت بینهایت میل میکنند و همچنین جواب هایی از این دستگاه نیز وجود دارد که

به سمت بردار صفر میل میکنند و با توجه به ضابطه کلی $\gamma(t)$ برای جواب دستگاه مذکور نتیجه میشود که رفتار مجانبی همه جواب های این دستگاه از یکی از همین دو نوع بیان شده می باشد. یعنی یا به بینهایت میل میکنند یا به بردار صفر.

صفحه فاز و مدار های سیستم ذکر شده در شکل زیر نشان داده شده اند:



- ۳) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم.

$$\det(xI - A) = \det(\begin{bmatrix} x+۱ & ۴ \\ -۱ & x+۱ \end{bmatrix}) = (x+۱)^۲ + ۴$$

پس مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_۱ = -۱ + ۲i$ و $\lambda_۲ = -۱ - ۲i$.

ابتدا بردار های ویژه متناظر با $\lambda_۱ = -۱ + ۲i$ را بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ ۱ & -۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = (-۱ + ۲i) \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} iy_۱ + ۲y_۲ = ۰ \\ y_۱ - ۲iy_۲ = ۰ \end{cases}$$

(معادله دوم در واقع همان معادله اول است که طرفین آن در $-i$ ضرب شده است). پس مثلا بردار ویژه $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۲i \\ ۱ \end{bmatrix}$ را متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱$ اختیار میکنیم.

بنابر یک نکته ای که در تمارین سری یک در رابطه با بدست آوردن مقادیر و بردار های ویژه بیان شده است از آنجایی که $\lambda_۱, \lambda_۲$ مزدوج هستند و ماتریس A دارای درایه های حقیقی می باشد نتیجه می شود که بردار ستونی $Y_۲$ که بر اثر مزدوج گیری از درایه های ماتریس $Y_۱$ حاصل می شود یک بردار ویژه برای $\lambda_۲$ می باشد. پس می توان بردار $Y_۲ = \begin{bmatrix} -۲i \\ ۱ \end{bmatrix}$ را به عنوان بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۱ - ۲i$ در نظر گرفت.

حال مشابه قسمت های قبلی داریم:

$$P=\begin{bmatrix}2i & -2i\\ 1 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow P\begin{bmatrix}-1+2i & 0\\ 0 & -1-2i\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$P\begin{bmatrix}(-1+2i)t & 0\\ 0 & (-1-2i)t\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}t$$

و داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}t)=P\begin{bmatrix}e^{-t+2ti} & 0\\ 0 & e^{-t-2ti}\end{bmatrix}P^{-1}$$

لازم است یادآوری کنیم که $e^{x+yi}=e^{x}(\cos y+i\sin y)$. با انجام دادن ضرب ماتریسی اخیر در نهایت به رابطه زیر می رسیم:

$$\exp(\begin{bmatrix}-1 & -4\\ 1 & -1\end{bmatrix}t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\sin 2t\\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix}$$

و در نتیجه جواب عمومی دستگاه مذکور توسط رابطه زیر داده می شود:

$$\Omega(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\sin 2t\\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

جواب خوصوصی دستگاه ذکر شده متناظر با شرط اولیه $X(0)=I$ عبارتست از:

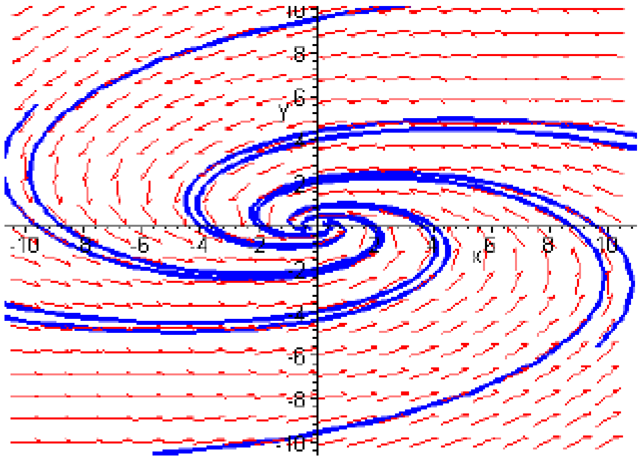
$$\Omega_1(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\sin 2t\\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix}$$

که نتیجه می دهد به عنوان جواب های از جنس ستونی دو ماتریس ستونی:

$$\gamma_1(t)=\begin{bmatrix}e^{-t}\cos 2t\\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t\end{bmatrix}\quad,\quad \gamma_2(t)=\begin{bmatrix}-2e^{-t}\sin 2t\\ e^{-t}\cos 2t\end{bmatrix}$$

پایه ای برای جواب های دستگاه مذکور تشکیل می دهند.به آسانی دیده می شود که وقتی $t\to\infty$ داریم $\gamma_1,\gamma_2\to 0$. در نتیجه تمامی جواب های دستگاه فوق در بینهایت به بردار صفر میل میکنند. در واقع میتوان نحوه میل کردن جواب ها به بردار صفر را نیز در این مثال توصیف کرد. به بیان دقیق تر عامل های $\sin$ و $\cos$ که در جواب ظاهر شده اند باعث می شوند که جواب ها با حالتی مارپیچ گونه به سمت بردار صفر میل کنند.

فضای فاز و مدارهای سیستم مذکور در شکل زیر نشان داده شده اند:



- ۴) همانند قسمت های قبل ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ را محاسبه میکنیم.

$$\det(xI - A) = \det(\begin{bmatrix} x-۲ & ۵ \\ -۱ & x+۲ \end{bmatrix}) = (x-۲)(x+۲) + ۵ = x^۲ + ۱$$

پس مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_۱ = i$ و $\lambda_۲ = -i$.

برای مقدار ویژه $\lambda_۱ = i$ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (۲-i)y_۱ - ۵y_۲ = ۰ \\ y_۱ - (۲+i)y_۲ = ۰ \end{cases}$$

پس یکی از بردار های ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = i$ برابر است با بردار $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۲+i \\ ۱ \end{bmatrix}$ و در نتیجه بردار $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۲-i \\ ۱ \end{bmatrix}$ یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -i$ می باشد. در نتیجه:

$$P = \begin{bmatrix} ۲+i & ۲-i \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} i & ۰ \\ ۰ & -i \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix}$$

پس:

$$P \begin{bmatrix} it & ۰ \\ ۰ & -it \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} t$$

و داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{it} & ۰ \\ ۰ & e^{-it} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

با انجام ضرب بالا در نهایت بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} \cos t + ۲\sin t & -۵\sin t \\ \sin t & \cos t - ۲\sin t \end{bmatrix}$$

و در نتیجه جواب عمومی دستگاه مذکور عبارتست از:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \cos t + ۲\sin t & -۵\sin t \\ \sin t & \cos t - ۲\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اعمال شرط اولیه $X(۰) = I$ جواب خصوصی زیر را برای دستگاه به همراه دارد:

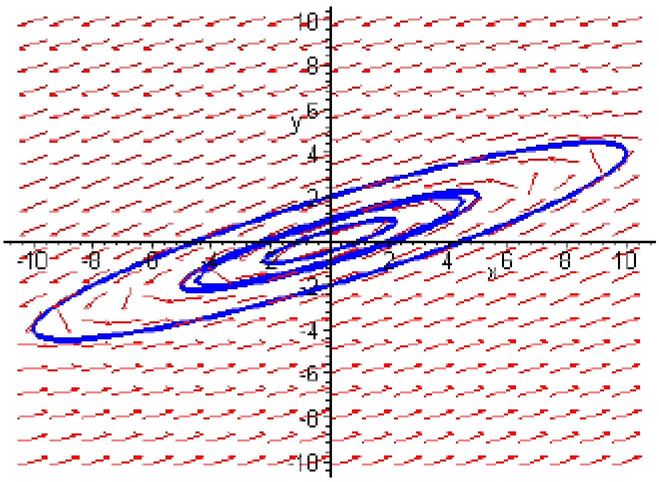
$$\Omega_۱(t) = \begin{bmatrix} \cos t + ۲\sin t & -۵\sin t \\ \sin t & \cos t - ۲\sin t \end{bmatrix}$$

که نتیجه می دهد که به عنوان جواب های ستونی ماتریس های:

$$\gamma_۱(t) = \begin{bmatrix} \cos t + ۲\sin t \\ \sin t \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma_۲(t) = \begin{bmatrix} -۵\sin t \\ \cos t - ۲\sin t \end{bmatrix}$$

پایه ای برای جواب های ستونی دستگاه مذکور تشکیل می دهند. ملاحظه می شود که از آنجایی که $\gamma_۱, \gamma_۲$ تناوبی با دوره تناوب ۲π می باشند پس همه جوابهای این دستگاه تناوبی با دوره تناوب ۲π می باشند. به عبارت دقیق تر اگر این جواب ها را به دید خم هایی در صفحه نگاه کنیم این خم ها بسته هستند و مبدا مختصات درون ناحیه ای قرار دارد که این خم ها احاطه کرده اند و از آنجایی که با ضرب جواب ها در یک عدد ثابت باز هم جوابی برای دستگاه بدست می آوریم نتیجه می شود که میتوان این خم های جواب را به قدر مطلوب به مبدا مختصات نزدیک و یا حتی دور کرد.

صفحه فاز و مدارهای این سیستم در شکل زیر توصیف شده اند:



- ۵) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & -\frac{۵}{۲} \\ \frac{۹}{۵} & -۱ \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم:

$$\det(xI - A) = \det(\begin{bmatrix} x - ۲ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۹}{۵} & x + ۱ \end{bmatrix}) = (x - ۲)(x + ۱) + \frac{۹}{۲} = x^۲ - x + \frac{۵}{۲}$$

و در نتیجه مقادیر ویژه ماتریس A عبارتند از $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$.

یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = (\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (3 - 3i)y_1 - 5y_2 = 0 \\ \frac{9}{5}y_1 - (\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i)y_2 = 0 \end{cases}$$

پس یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ عبارت است از $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$ و در نتیجه یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ برابر می شود با $Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{5} + \frac{3}{5}i \end{bmatrix}$. در نتیجه:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{5} - \frac{3}{5}i & \frac{3}{5} + \frac{3}{5}i \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t + \frac{3}{2}ti} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t - \frac{3}{2}ti} \end{bmatrix} P^{-1}$$

و با انجام ضرب ماتریسی بالا در نهایت بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t + e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t & -\frac{5}{3}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \\ \frac{6}{5}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t & e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t - e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \end{bmatrix}$$

در نهایت جواب عمومی دستگاه مذکور برابر می شود با:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t + e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t & -\frac{5}{3}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \\ \frac{6}{5}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t & e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t - e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

و جواب خصوصی دستگاه متناظر با شرط اولیه $X(0) = I$ برابر می شود با:

$$\Omega_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t + e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t & -\frac{5}{3}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \\ \frac{6}{5}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t & e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t - e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \end{bmatrix}$$

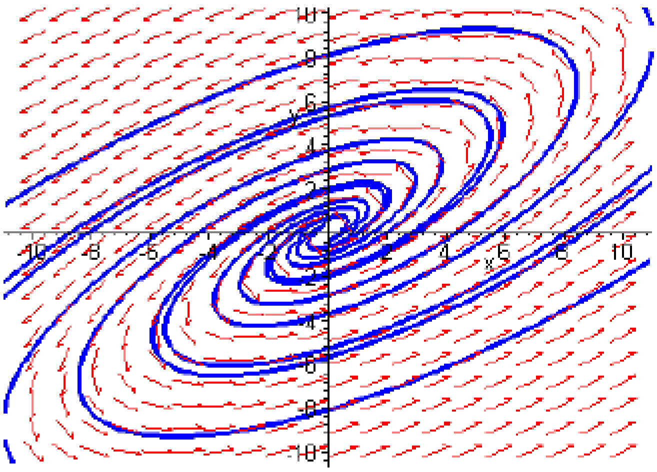
در نتیجه به عنوان جواب های ستونی نتیجه می شود که بردار های:

$$\gamma_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t + e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \\ \frac{6}{5}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma_2(t) = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \\ e^{\frac{1}{2}t} \cos \frac{3}{2}t - e^{\frac{1}{2}t} \sin \frac{3}{2}t \end{bmatrix}$$

پایه ای برای جواب های ستونی دستگاه فوق تشکیل می دهند (یادآوری میکنیم که منظور از بیان اخیر آن است که هر جواب ستونی دستگاه را می توان بصورت ترکیبی خطی از این جواب های بیان شده نوشت که ضرایب دخیل در این ترکیب خطی اعدادی ثابت هستند).

حال وقتی که $t \to \infty$ به آسانی مشاهده می شود که γ_1, γ_2 به سمت بینهایت میل می کنند. در واقع این جواب ها بصورت مارپیچ گونه از مبدا مختصات در حال دور شدن هستند و از آنجایی که هر جواب باید ترکیبی خطی از γ_1, γ_2 باشد نتیجه می شود که هر جواب غیر صفر از این دستگاه بصورت مسیری مارپیچ گونه در حال دور شدن از مبدامختصات می باشد.

صفحه فاز و مدار های این دستگاه در شکل زیر نشان داده شده اند:



- ۶) این قسمت با قسمت های قبلی کمی تفاوت دارد. در واقع ماتریسی که در این قسمت با آن درگیر هستیم همانند قسمت های قبلی نمی تواند قطری بشود و باید روش های دیگری را امتحان کنیم.

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم. خوشبختانه در این مثال نیازی نیست که چند جمله ای مشخصه را بدست بیاوریم. در واقع از آنجایی که A وارون ناپذیر است نتیجه می شود که $\lambda_1 = 0$ یک مقدار ویژه A است و از آنجایی که جمع عناصر قطر اصلی A برابر با صفر است نتیجه می شود که تنها مقدار ویژه A همان مقدار ویژه صفر است که دارای تکرر دو در چند جمله ای مشخصه اش می باشد. یعنی $\lambda_1, \lambda_2 = 0$.

اکنون تلاش میکنیم که با تغییر پایه ای مناسب ماتریس A را به فرم:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تبدیل کنیم. برای این منظور بدین صورت عمل میکنیم. ابتدا یک بردار ویژه متناظر با تنها مقدار ویژه A که برابر

با صفر می باشد می یابیم:

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲y_۱ - y_۲ = ۰ \\ ۲y_۱ - y_۲ = ۰ \end{cases}$$

پس مثلا بردار $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ را به عنوان یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه صفر انتخاب میکنیم. حال یک بردار غیر موازی با $Y_۱$ اختیار کنید. مثلا $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$. اکنون مقدار α را از معادله زیر استخراج کنید:

$$\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ ۲\alpha \end{bmatrix}$$

با حل معادله بالا بدست می آوریم $\alpha = -۲$. اکنون :

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} ۰ & -۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix} t) = P(\exp(\begin{bmatrix} ۰ & -۲t \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}))P^{-۱}$$

اما اگر قرار دهیم:

$$S(t) = \begin{bmatrix} ۰ & -۲t \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

آنگاه محاسبه ای ساده نشان می دهد که $S(t)^۲ = ۰$ و در نتیجه توان های بالاتر $S(t)$ نیز برابر با صفر می شود و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\exp(S(t)) = I + S(t) = \begin{bmatrix} ۱ & -۲t \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} ۱ & -۲t \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix} P^{-۱}$$

و حاصل برابر می شود با:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} ۱ + ۴t & -۲t \\ ۸t & ۱ - ۴t \end{bmatrix}$$

البته در این حالت خاص بطور مستقیم نیز می توان $\exp(At)$ را محاسبه نمود. از آنجایی که توان های دوم و سوم و .... ماتریس At برابر با صفر می باشند نتیجه می شود که:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۸ & -۴ \end{bmatrix} t) = I + \begin{bmatrix} ۴t & -۲t \\ ۸t & -۴t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ + ۴t & -۲t \\ ۸t & ۱ - ۴t \end{bmatrix}$$

لیکن مزیت را حل اول وقتی آشکار میشود که چند جمله ای ویژه ماتریس ریشه ای با تکرر بیشتر از یکبار داشته باشد و همه ریشه های این چند جمله ای با هم صفر نباشند.

در هر صورت جواب عمومی دستگاه مذکور عبارت است از:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} ۱+۴t & -۲t \\ ۸t & ۱-۴t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

و با اعمال شرط اولیه $X(۰) = I$ یک جواب خصوصی دستگاه مذکور را بدست می آوریم:

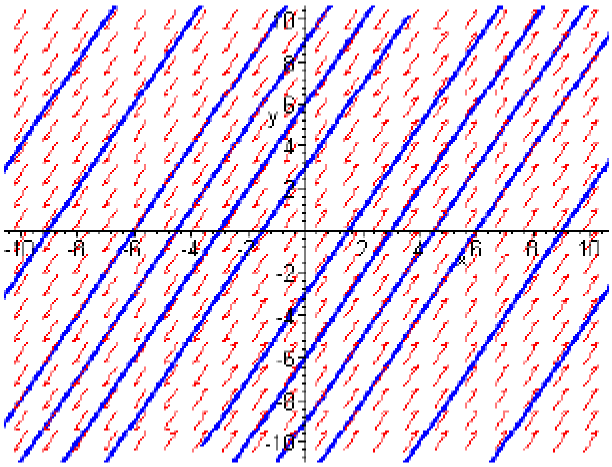
$$\Omega_۱(t) = \begin{bmatrix} ۱+۴t & -۲t \\ ۸t & ۱-۴t \end{bmatrix}$$

و در نتیجه جواب های ستونی:

$$\gamma_۱(t) = \begin{bmatrix} ۱+۴t \\ ۸t \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma_۲(t) = \begin{bmatrix} -۲t \\ ۱-۴t \end{bmatrix}$$

پایه ای برای جواب های ستونی دستگاه مذکور تشکیل می دهند. به آسانی مشاهده می شود که خم $\gamma_۱$ روی خط $-۲x+y=-۲$ و خم $\gamma_۲$ روی خط $-۲x+y=۱$ در حرکت هستند. پس از آنجایی که هر جواب بصورت ترکیبی خطی از $\gamma_۱, \gamma_۲$ می باشد نتیجه میگیریم که مدار های این سیستم خطی می باشد و وقتی که $t \to \infty$ این جواب ها می توانند به سمت ∞ یا $-\infty$ میل کنند و طریقه میل کردن آنها به ∞ یا $-\infty$ بطور خطی می باشد.

در شکل زیر صفحه فاز و مدارهای دستگاه فوق نشان داده شده اند:



• ۷) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم:

$$\det(xI - A) = \det(\begin{bmatrix} x+۳ & -\frac{۵}{۲} \\ \frac{۵}{۲} & x-۲ \end{bmatrix}) = (x+۳)(x-۲) + \frac{۲۵}{۴} = x^۲ + x + \frac{۱}{۴} = (x+\frac{۱}{۲})^۲$$

پس تنها مقدار ویژه ماتریس A برابر است با $\lambda = -\frac{۱}{۲}$. این هم نمونه ای از سوالی است که در آن ماتریس A قطری نمی شود و همچنین توان های این ماتریس نیز صفر نمی شوند (چرا که وارون پذیر است). پس از روش اولی که در قسمت قبل بیان نمودیم استفاده می کنیم تا ماتریس A را در پایه ای مناسب بصورت :

$$\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \alpha \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

بیان کنیم. ابتدا یک بردار ویژه متناظر با $\lambda = -\frac{۱}{۲}$ بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix}$$

به آسانی می توان بررسی کرد که بردار $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ در معادله فوق صدق میکند. حال یک بردار غیر موازی با $Y_۱$ اختیار میکنیم. مثلا $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ و α را از معادله زیر استخراج میکنیم:

$$\begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} - \frac{۱}{۲} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

به آسانی مشاهده می شود که $\alpha = \frac{۵}{۲}$. اکنون:

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۵}{۲} \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix} t) = P(\exp(\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲}t & \frac{۵}{۲}t \\ ۰ & -\frac{۱}{۲}t \end{bmatrix}))P^{-۱}$$

اما با استفاده از استقرا می توان درستی رابطه زیر را بررسی نمود:

$$S(t) = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲}t & \frac{۵}{۲}t \\ ۰ & -\frac{۱}{۲}t \end{bmatrix} \Rightarrow S(t)^n = \begin{bmatrix} (-\frac{۱}{۲}t)^n & -۵n(-\frac{۱}{۲}t)^n \\ ۰ & (-\frac{۱}{۲}t)^n \end{bmatrix}$$

پس $\exp(S(t))$ ماتریسی بالا مثلثی می باشد که در قطر اصلی آن عبارت $e^{-\frac{۱}{۲}t}$ قرار دارد. عبارت واقع بر سطر اول و ستون دوم $\exp(S(t))$ نیز عبارت است از:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} -\frac{۵n}{n!}(-\frac{۱}{۲}t)^n = \sum_{n=۱}^{\infty} -\frac{۵}{(n-۱)!}(-\frac{۱}{۲}t)^n = \frac{۵}{۲}t \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n-۱)!}(-\frac{۱}{۲}t)^{n-۱}$$

که برابر می شود با $\frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t}$. در نتیجه:

$$\exp(S(t)) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{۱}{۲}t} & \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ ۰ & e^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

و :

$$\exp(\begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-\frac{۱}{۲}t} & \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ ۰ & e^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

با انجام ضرب ماتریسی اخیر در نهایت به رابطه زیر می رسیم:

$$\exp(\begin{bmatrix} -۳ & \frac{۵}{۲} \\ -\frac{۵}{۲} & ۲ \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{۱}{۲}t} - \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} & \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} & e^{-\frac{۱}{۲}t} + \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

و در نهایت جواب عمومی دستگاه مذکور عبارت است از:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{۱}{۲}t} - \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} & \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} & e^{-\frac{۱}{۲}t} + \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

و جواب متناظر با شرط اولیه $X(۰) = I$ نیز عبارت است از:

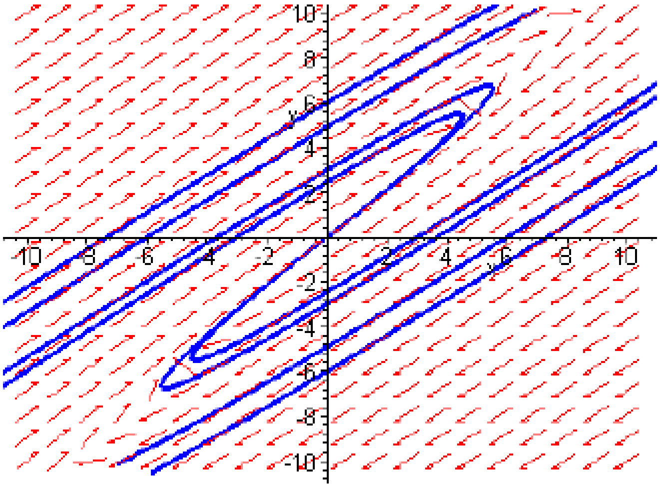
$$\Omega_۱(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{۱}{۲}t} - \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} & \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} & e^{-\frac{۱}{۲}t} + \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

در نتیجه به عنوان جواب های ستونی دو بردار ستونی :

$$\gamma_۱(t) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{۱}{۲}t} - \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix} \quad , \quad \gamma_۲(t) = \begin{bmatrix} \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \\ e^{-\frac{۱}{۲}t} + \frac{۵}{۲}te^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

پایه ای برای جواب های ستونی دستگاه مذکور تشکیل می دهند.

مشاهده می شود که وقتی $t \to \infty$ آنگاه $\gamma_۱, \gamma_۲$ به سمت بردار صفر (مبدا مختصات) میل میکنند و در نتیجه تمام مدار های این دستگاه به مبدا مختصات میل میکنند و مبدا یک نقطه جاذب برای این دستگاه می باشد. صفحه فاز و مدارهای این سیستم در شکل زیر نشان داده شده اند:



سوال ۲ جواب عمومی هر کدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

- (۱

$$x' = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} x$$

- (۲

$$x' = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} x$$

- (۳

$$x' = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} x$$

- (۴

$$x' = \begin{bmatrix} -۳ & ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ \\ -۲ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} x$$

- (۵

$$x' = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ -۸ & -۵ & -۳ \end{bmatrix} x$$

- (۶

$$x' = \begin{bmatrix} ۲ & ۲+i \\ -۱ & -۱-i \end{bmatrix} x$$

پاسخ • ۱) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم. داریم:

$$\det(xI-A)=\det(\begin{bmatrix} x-۱ & -۱ & -۱ \\ -۲ & x-۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & x-۱ \end{bmatrix})=(x-۱)^۳-۳(x-۱)+۲=(x-۲)^۲(x+۱)$$

پس مقادیر ویژه A عبارتند از $\lambda_۱=۲$ و $\lambda_۲=-۱$ که مقدار ویژه $\lambda_۱$ از تکرر ۲ می باشد.

حال بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را بدست می آوریم. برای $\lambda_۱=۲$ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}=۲\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}$$

اگر مولفه های سوم طرفین را برابر قرار دهیم به رابطه $y_۳=-y_۲$ می رسیم. با جایگزینی این رابطه در رابطه ای که بر اثر تساوی قرار دادن مولفه های اول طرفین بدست می آید داریم $y_۱=۰$ و در نتیجه میتوان بردار های ویژه متناظر با $\lambda_۱$ را بصورت $Y=\begin{bmatrix} ۰ \\ c \\ -c \end{bmatrix}$ بیان نمود. پس مثلا بردار ویژه $Y_۱=\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$ را متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱=۲$ انتخاب میکنیم. توجه کنید که دیگر نمی توانیم برداری مستقل از بردار $Y_۱$ در نظر بگیریم که برداری ویژه متناظر با $Y_۱$ باشد و از آنجایی که $\lambda_۱$ از تکرر ۲ می باشد همین امر نتیجه می دهد که نمی توانیم ماتریس A را به فرم قطری اش تبدیل کنیم.

حال یک بردار ویژه نیز متناظر با $\lambda_۲=-۱$ نیز بدست می آوریم :

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}=-۱\begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن مولفه های سوم طرفین بدست می آوریم $y_۲=۲y_۳$ و با تلفیق این رابطه با رابطه ای که از تساوی قرار دادن مولفه های اول طرفین حاصل می شود بدست می آوریم $y_۱=-\frac{۳}{۲}y_۳$. پس بردار های ویژه متناظر با $\lambda_۲=-۱$ را نیز می توان به شکل $Y=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲}c \\ ۲c \\ c \end{bmatrix}$ بیان نمود که مثلا بردار ویژه $Y_۲=\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} \\ ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ را انتخاب می کنیم.

حال بدین صورت عمل می کنیم که ماتریس A را در پایه ای مناسب به فرم:

$$\begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & \beta \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}$$

تبدیل می کنیم. بدین منظور عدد β و بردار $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ که مستقل از $Y_۱, Y_۲$ می باشد را به قسمی پیدا میکنیم که رابطه زیر برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} + ۲ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

با محاسبات مشخص می شود که برقرار بودن تساوی فوق معادل است با برقراری روابط $a = \beta, b + c = \beta$. با قرار دارن $a = \beta = ۱$ و $b = ۱$ و $c = ۰$ بردار $Y_۳ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و عدد $\beta = ۱$ را بدست می آوریم. همچنین به آسانی تحقیق می شود که بردار های $Y_۱, Y_۲, Y_۳$ مستقل خطی هستند. اکنون داریم:

$$P = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۲} & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \\ ۱ & -۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه :

$$\exp(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} t) = P(\exp(\begin{bmatrix} -t & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲t & t \\ ۰ & ۰ & ۲t \end{bmatrix}))P^{-۱}$$

اما با استفاده از استقرا نتیجه می شود که:

$$S(t) = \begin{bmatrix} -t & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲t & t \\ ۰ & ۰ & ۲t \end{bmatrix} \Rightarrow S(t)^n = \begin{bmatrix} (-t)^n & ۰ & ۰ \\ ۰ & (۲t)^n & nt(۲t)^{n-۱} \\ ۰ & ۰ & (۲t)^n \end{bmatrix}$$

برای بدست آوردن درایه واقع بر سطر دوم و ستون سوم $\exp(S(t))$ باید عبارت زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_{n=۰}^{\infty} \frac{nt}{n!}(۲t)^{n-۱} = t \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n-۱)!}(۲t)^{n-۱} = te^{۲t}$$

و در نتیجه:

$$\exp(S(t)) = \begin{bmatrix} e^{-t} & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{۲t} & te^{۲t} \\ ۰ & ۰ & e^{۲t} \end{bmatrix}$$

و

$$\exp(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{۲t} & te^{۲t} \\ ۰ & ۰ & e^{۲t} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

با انجام ضرب ماتریسی بالا در نهایت به رابطه زیر دست می یابیم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} t) = \frac{۱}{۹} \begin{bmatrix} ۳e^{-t} + ۶e^{۲t} & -۳e^{-t} + ۳e^{۲t} & -۳e^{-t} + ۳e^{۲t} \\ -۴e^{-t} + ۴e^{۲t} + ۶te^{۲t} & ۴e^{-t} + ۵e^{۲t} + ۳te^{۲t} & ۴e^{-t} - ۴e^{۲t} + ۳te^{۲t} \\ -۲e^{-t} + ۲e^{۲t} - ۶te^{۲t} & ۲e^{-t} - ۲e^{۲t} - ۳te^{۲t} & ۲e^{-t} + ۷e^{۲t} - ۳te^{۲t} \end{bmatrix}$$

عبارت فوق در واقع جواب دستگاه متناظر با شرط اولیه $X(۰) = I$ می باشد و از آنجایی که ضرب این ماتریس در یک عدد ثابت نیز جواب این دستگاه می باشد می توان عدد $\frac{۱}{۹}$ را نادیده گرفت. اکنون جواب عمومی مربعی دستگاه مذکور توسط رابطه :

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} ۳e^{-t} + ۶e^{۲t} & -۳e^{-t} + ۳e^{۲t} & -۳e^{-t} + ۳e^{۲t} \\ -۴e^{-t} + ۴e^{۲t} + ۶te^{۲t} & ۴e^{-t} + ۵e^{۲t} + ۳te^{۲t} & ۴e^{-t} - ۴e^{۲t} + ۳te^{۲t} \\ -۲e^{-t} + ۲e^{۲t} - ۶te^{۲t} & ۲e^{-t} - ۲e^{۲t} - ۳te^{۲t} & ۲e^{-t} + ۷e^{۲t} - ۳te^{۲t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

بیان می شود که در آن a_{ij} ها اعداد ثابتی هستند. همچنین جواب عمومی ستونی این دستگاه نیز توسط رابطه:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} ۳e^{-t} + ۶e^{۲t} & -۳e^{-t} + ۳e^{۲t} & -۳e^{-t} + ۳e^{۲t} \\ -۴e^{-t} + ۴e^{۲t} + ۶te^{۲t} & ۴e^{-t} + ۵e^{۲t} + ۳te^{۲t} & ۴e^{-t} - ۴e^{۲t} + ۳te^{۲t} \\ -۲e^{-t} + ۲e^{۲t} - ۶te^{۲t} & ۲e^{-t} - ۲e^{۲t} - ۳te^{۲t} & ۲e^{-t} + ۷e^{۲t} - ۳te^{۲t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

بیان می شود که در آن a, b, c اعدادی ثابت هستند.

- ۲) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم. از آنجایی که مشابه محاسبات را در قسمت های قبل انجام داده ایم ما فقط به بیان مقادیر ویژه A و بردارهایی ویژه متناظر با مقادیر ویژه A کفایت میکنیم.

مقادیر ویژه A عبارتند از $\lambda_۱ = -۱, \lambda_۲ = ۲$ و مقدار ویژه $\lambda_۱ = -۱$ از تکرر ۲ می باشد. یادآوری این نکته هم می تواند مفید باشد که از آنجایی که A متقارن می باشد نتیجه می شود که A حتما در پایه ای مناسب قطری می شود.

پس متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = -۱$ حتما دو بردار ویژه مستقل خطی می توان یافت.

دو بردار ویژه مستقل خطی متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = -۱$ عبارتند از $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \\ -۱ \end{bmatrix}$ و $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$.

یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۲$ نیز برابر است با $Y_۳ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$.

اکنون:

$$P = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ -۱ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{-t} & ۰ \\ ۰ & ۰ & e^{۲t} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

با انجام ضرب ماتریسی بالا در نهایت بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} t) = \frac{۱}{۳} \begin{bmatrix} ۲e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} \\ -e^{-t} + e^{۲t} & ۲e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} \\ -e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} & ۲e^{-t} + e^{۲t} \end{bmatrix}$$

و در نهایت با اغماض $\frac{۱}{۳}$ جواب مربعی عمومی دستگاه عبارت است از:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} ۲e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} \\ -e^{-t} + e^{۲t} & ۲e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} \\ -e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} & ۲e^{-t} + e^{۲t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳} \\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳} \end{bmatrix}$$

که a_{ij} ها اعداد ثابتی هستند. همچنین جواب عمومی ستونی دستگاه نیز توسط رابطه:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} ۲e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} \\ -e^{-t} + e^{۲t} & ۲e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} \\ -e^{-t} + e^{۲t} & -e^{-t} + e^{۲t} & ۲e^{-t} + e^{۲t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

بیان می شود که a, b, c اعدادی ثابت هستند.

- ۳) برای $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه A عبارتند از $\lambda_۱ = ۱, \lambda_۲ = ۱ + ۲i, \lambda_۳ = ۱ - ۲i$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۱$ عبارت است از $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -\frac{۳}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$. یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_۲ = ۱ + ۲i$ برابر است با $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۰ \\ i \\ ۱ \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۳ = ۱ - ۲i$ برابر است با $Y_۳ = \begin{bmatrix} ۰ \\ -i \\ ۱ \end{bmatrix}$. در نتیجه:

$$P = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -\frac{۳}{۲} & i & -i \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow P \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ + ۲i & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ - ۲i \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

و:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{t} & ۰ & ۰ \\ ۰ & e^{t+۲ti} & ۰ \\ ۰ & ۰ & e^{t-۲ti} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

و با انجام ضرب ماتریسی اخیر رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$\exp\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&-2\\3&2&1\end{bmatrix}t\right)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}4e^t&0&0\\-6e^t+6e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t&4e^t\cos 2t&-4e^t\sin 2t\\4e^t-4e^t\cos 2t+6e^t\sin 2t&4e^t\sin 2t&4e^t\cos 2t\end{bmatrix}$$

که رابطه بدست آمده در واقع جواب سیستم مذکور با شرط اولیه $X(0)=I$ می باشد. پس در حالت کلی جواب مربعی سیستم بصورت زیر می باشد:

$$\Omega(t)=\begin{bmatrix}4e^t&0&0\\-6e^t+6e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t&4e^t\cos 2t&-4e^t\sin 2t\\4e^t-4e^t\cos 2t+6e^t\sin 2t&4e^t\sin 2t&4e^t\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

که در آن a_{ij} اعدادی دلخواه هستند. همچنین فرم کلی جواب های ستونی سیستم نیز بصورت:

$$\Gamma(t)=\begin{bmatrix}4e^t&0&0\\-6e^t+6e^t\cos 2t+4e^t\sin 2t&4e^t\cos 2t&-4e^t\sin 2t\\4e^t-4e^t\cos 2t+6e^t\sin 2t&4e^t\sin 2t&4e^t\cos 2t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$$

است که a,b,c اعداد دلخواهی هستند.

- ۴) برای ماتریس $A=\begin{bmatrix}-3&0&2\\1&-1&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}$ مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_1=-2,\lambda_2=-1+\sqrt{2}i,\lambda_3=-1-\sqrt{2}i$.

یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1=-2$ عبارت است از $Y_1=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}$. همچنین یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2=-1+\sqrt{2}i$ برابر است با $Y_2=\begin{bmatrix}\sqrt{2}i\\1\\-1+\sqrt{2}i\end{bmatrix}$ و در نتیجه یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_3=-1-\sqrt{2}i$ نیز برابر است با $Y_3=\begin{bmatrix}-\sqrt{2}i\\1\\-1-\sqrt{2}i\end{bmatrix}$. اکنون :

$$P=\begin{bmatrix}2&\sqrt{2}i&-\sqrt{2}i\\-2&1&1\\1&-1+\sqrt{2}i&-1-\sqrt{2}i\end{bmatrix}\Rightarrow P\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-1+\sqrt{2}i&0\\0&0&-1-\sqrt{2}i\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}-3&0&2\\1&-1&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp\left(\begin{bmatrix}-3&0&2\\1&-1&0\\-2&-1&0\end{bmatrix}t\right)=P\begin{bmatrix}e^{-2t}&0&0\\0&e^{\lambda_2 t}&0\\0&0&e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

و با انجام ضرب ماتریسی اخیر در نهایت به ماتریس مربعی $\frac{1}{12}\Omega(t)$ دست می یابیم که درایه ij (سطر i و ستون j) ماتریس $\Omega(t)$ به فرم:

$$\gamma_{ij}(t) = a_{ij}e^{-2t} + b_{ij}e^{-t}\cos\sqrt{2}t + c_{ij}e^{-t}\sin\sqrt{2}t$$

می باشد که در آن:

$$a_{11} = 8, b_{11} = 4, c_{11} = -8\sqrt{2}$$

$$a_{21} = -8, b_{21} = 8, c_{21} = 2\sqrt{2}$$

$$a_{31} = 4, b_{31} = -4, c_{31} = -10\sqrt{2}$$

$$a_{12} = -8, b_{12} = 8, c_{12} = -4\sqrt{2}$$

$$a_{22} = 8, b_{22} = 4, c_{22} = -4\sqrt{2}$$

$$a_{32} = -4, b_{32} = 4, c_{32} = -8\sqrt{2}$$

$$a_{13} = -8, b_{13} = 8, c_{13} = 8\sqrt{2}$$

$$a_{23} = 8, b_{23} = -8, c_{23} = 4\sqrt{2}$$

$$a_{33} = -4, b_{33} = 16, c_{33} = 4\sqrt{2}$$

و ماتریس مربعی $\frac{1}{12}\Omega(t)$ در واقع جواب سیستم متناظر با شرط اولیه $X(0) = I$ می باشد. در نهایت جواب عمومی مربعی (ستونی) دستگاه مذکور توسط رابطه $\Omega(t)B$ داده می شود که در آن B یک ماتریس مربعی (ستونی) ثابت می باشد.

- ۵) برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & -5 & -8 \end{bmatrix}$ مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = -1$ برابر است با $Y_1 = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2 = -2$ عبارت است از $Y_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ 1 \\ \frac{7}{5} \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_3 = 2$ نیز عبارت است از $Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

اکنون داریم:

$$P=\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & -\frac{4}{5} & 0\\ 1 & 1 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{7}{5} & -1\end{bmatrix} \Rightarrow P\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -8 & -5 & -3\end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -8 & -5 & -3\end{bmatrix}t)=P\begin{bmatrix}e^{-t} & 0 & 0\\ 0 & e^{-2t} & 0\\ 0 & 0 & e^{2t}\end{bmatrix}P^{-1}$$

با انجام ضرب ماتریسی بالا در نهایت بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ -8 & -5 & -3\end{bmatrix}t)=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}36e^{-t}-24e^{-2t} & 12e^{-t}-12e^{-2t} & 12e^{-t}-12e^{-2t}\\ -48e^{-t}+30e^{-2t}+18e^{2t} & -16e^{-t}+15e^{-2t}+13e^{2t} & -16e^{-t}+15e^{-2t}+e^{2t}\\ -24e^{-t}+42e^{-2t}-18e^{2t} & -8e^{-t}+21e^{-2t}-13e^{2t} & -8e^{-t}+21e^{-2t}-e^{2t}\end{bmatrix}$$

که جواب دستگاه مذکور متناظر با شرط اولیه $X(0)=I$ می باشد. در نهایت اگر اسکالر $\frac{1}{12}$ را اغماض کنیم و ماتریس حاصل را برابر با $R(t)$ بنامیم آنگاه فرم کلی جواب مربعی (سطری) دستگاه به فرم $R(t)B$ می باشد که در آن B یک ماتریس مربعی (سطری) ثابت می باشد.

- ۶) ابتدا مقادیر ویژه ماتریس $A=\begin{bmatrix}2 & 2+i\\ -1 & -1-i\end{bmatrix}$ را بدست می آوریم. مقادیر ویژه این ماتریس عبارتند از $\lambda_1=1, \lambda_2=-i$.

  یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1=1$ عبارت است از $Y_1=\begin{bmatrix}-2-i\\ 1\end{bmatrix}$.

  یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_2=-i$ نیز عبارت است از $Y_2=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$.

  اکنون:

$$P=\begin{bmatrix}-2-i & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow P\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -i\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 2+i\\ -1 & -1-i\end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix}2 & 2+i\\ -1 & -1-i\end{bmatrix}t)=P\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{bmatrix}P^{-1}$$

با انجام ضرب ماتریسی بالا به رابطه زیر دست می یابیم:

$$\exp(\begin{bmatrix}2 & 2+i\\ -1 & -1-i\end{bmatrix}t)=\frac{1}{1+i}\begin{bmatrix}(2e^{t}-\cos t)+i(e^{t}+\sin t) & (2e^{t}-2\cos t-\sin t)+i(e^{t}-\cos t+2\sin t)\\ (-e^{t}+\cos t)-i\sin t & (-e^{t}+2\cos t+\sin t)+i(\cos t-2\sin t)\end{bmatrix}$$

رابطه اخیر در واقع جواب دستگاه مذکور با شرط اولیه $X(0)=I$ می باشد. همانند قسمت های قبلی با اغماض

$\frac{1}{1+i}$ باز هم جوابی از دستگاه مذکور را داریم. پس صورت عمومی مربعی جواب سیستم بصورت:

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} (2e^t - \cos t) + i(e^t + \sin t) & (2e^t - 2\cos t - \sin t) + i(e^t - \cos t + 2\sin t) \\ (-e^t + \cos t) - i\sin t & (-e^t + 2\cos t + \sin t) + i(\cos t - 2\sin t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

می باشد که در آن a_{ij} ها اعدادی (مختلط) دلخواه هستند. همچنین فرم ستونی کلی جواب ها هم بصورت:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} (2e^t - \cos t) + i(e^t + \sin t) & (2e^t - 2\cos t - \sin t) + i(e^t - \cos t + 2\sin t) \\ (-e^t + \cos t) - i\sin t & (-e^t + 2\cos t + \sin t) + i(\cos t - 2\sin t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

می باشد که در آن a, b اعداد (مختلط) دلخواهی هستند.

سوال ۳ جواب های خصوصی (یکتای) هر کدام از مسائل مقدار اولیه زیر را بدست بیاورید.

- ۱)

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} x \quad , \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- ۲)

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} x \quad , \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- ۳)

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix} x \quad , \quad x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

پاسخ در تمامی قسمت های این سوال ابتدا exp ماتریس ضرایب را بدست آورده و در نهایت شرط اولیه سوال را از راست در ماتریس حاصل ضرب میکنیم و حاصل جواب مسئله می باشد. همچنین در تمام سوالات فرض میکنیم که شرط اولیه به ازای $t = 0$ باشد.

- ۱) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$. یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_1 = -1 + i$ عبارت است از $Y_1 = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_2 = -1 - i$ نیز عبارت است از $Y_2 = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$. اکنون قرار میدهیم $P = \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-t+it} & 0 \\ 0 & e^{-t-it} \end{bmatrix} P^{-1}$$

و در نهایت:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t & -5e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$$

با ضرب شرط اولیه مسئله از راست در ماتریس بالا جواب مسئله بدست می آید:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t + ۲e^{-t}\sin t & -۵e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t - ۲e^{-t}\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t - ۳e^{-t}\sin t \\ e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$$

- ۲) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_۱ = ۳, \lambda_۲ = -۱$. یک بردار ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۳$ عبارت است از $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ و یک بردار ویژه متناظر با $\lambda_۲ = -۱$ عبارت است از $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$. با در نظر گرفتن $P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۵ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{۳t} & ۰ \\ ۰ & e^{-t} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

و در نهایت:

$$\exp(\begin{bmatrix} -۲ & ۱ \\ -۵ & ۴ \end{bmatrix} t) = -\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} e^{۳t} - ۵e^{-t} & -e^{۳t} + e^{-t} \\ ۵e^{۳t} - ۵e^{-t} & -۵e^{۳t} + e^{-t} \end{bmatrix}$$

در پایان با اعمال شرط اولیه به جواب مسئله می رسیم:

$$\Gamma(t) = -\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} e^{۳t} - ۵e^{-t} & -e^{۳t} + e^{-t} \\ ۵e^{۳t} - ۵e^{-t} & -۵e^{۳t} + e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} = -\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} -۲e^{۳t} - ۲e^{-t} \\ -۱۰e^{۳t} - ۲e^{-t} \end{bmatrix}$$

- ۳) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & \frac{۳}{۲} \\ -\frac{۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$ عبارت است از $\lambda = \frac{۱}{۲}$ که این مقدار ویژه از تکرر ۲ می باشد. یک بردار ویژه متناظر با این مقدار ویژه برابر است با $Y_۱ = \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$. با در نظر گرفتن بردار $Y_۲ = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ و در نظر گرفتن ماتریس $P = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۱ & ۰ \end{bmatrix}$ داریم:

$$P \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۲} \\ ۰ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} P^{-۱} = \begin{bmatrix} ۲ & \frac{۳}{۲} \\ -\frac{۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & \frac{۳}{۲} \\ -\frac{۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{\frac{۱}{۲}t} & \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \\ ۰ & e^{\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

و در نهایت داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} ۲ & \frac{۳}{۲} \\ -\frac{۳}{۲} & -۱ \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{۱}{۲}t} + \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} & \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} & e^{\frac{۱}{۲}t} - \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

در پایان با ضرب شرط اولیه از راست در ماتریس بالا به جواب نهایی می رسیم:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{\frac{۱}{۲}t} + \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} & \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \\ -\frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} & e^{\frac{۱}{۲}t} - \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳e^{\frac{۱}{۲}t} + \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \\ -۲e^{\frac{۱}{۲}t} - \frac{۳}{۲}te^{\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

سوال ۴ در هرکدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر:

- الف) ماتریس اساسی جواب را پیدا کنید.
- ب) ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در شرط $\Phi(۰) = I$ صرق میکند را بیابید.

- ۱)

$$x^{'} = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۸} & -\frac{۳}{۴} \end{bmatrix} x$$

- ۲)

$$x^{'} = \begin{bmatrix} ۲ & -۵ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} x$$

- ۳)

$$x^{'} = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۵ & -۳ \end{bmatrix} x$$

پاسخ

- ۱) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۸} & -\frac{۳}{۴} \end{bmatrix}$ عبارت هستند از $\lambda_۱ = -۱, \lambda_۲ = -\frac{۱}{۲}$. بردار های ویژه متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_۱, \lambda_۲$ به ترتیب عبارتند از:

$$Y_۱ = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad Y_۲ = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

و با در نظر گرفتن ماتریس $P = \begin{bmatrix} -۲ & ۲ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۸} & -\frac{۳}{۴} \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & ۰ \\ ۰ & e^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix} P^{-۱}$$

و در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۸} & -\frac{۳}{۴} \end{bmatrix} t) = -\frac{۱}{۴} \begin{bmatrix} -۲e^{-t} - ۲e^{-\frac{۱}{۲}t} & ۴e^{-t} - ۴e^{-\frac{۱}{۲}t} \\ e^{-t} - e^{-\frac{۱}{۲}t} & -۲e^{-t} - ۲e^{-\frac{۱}{۲}t} \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق ماتریس اساسی سیستم مذکور است که در شرط $\Phi(0) = I$ صدق می کند. صورت کلی ماتریس های اساسی این سیستم به فرم:

$$\begin{bmatrix} -2e^{-t} - 2e^{-\frac{1}{2}t} & 4e^{-t} - 4e^{-\frac{1}{2}t} \\ e^{-t} - e^{-\frac{1}{2}t} & -2e^{-t} - 2e^{-\frac{1}{2}t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

می باشد که در آن ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی ثابت و وارون پذیر می باشد.

- ۲) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه به ترتیب عبارتند از:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

البته خوشبختانه در قسمت ۴ از تمرین شماره ۱ exp ماتریس A محاسبه شده است:

$$\exp(\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{bmatrix}$$

ماتریس فوق ماتریس اساسی سیستم به ازای شرط اولیه $\Phi(0) = I$ می باشد. همانند قسمت قبل صورت کلی ماتریس اساسی سیستم مذکور به فرم :

$$\begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

می باشد که در آن ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی ثابت و وارون پذیر می باشد.

- ۳) مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i = \bar{\lambda}_1$. بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه به ترتیب عبارتند از :

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2-i \end{bmatrix} \quad , \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2+i \end{bmatrix}$$

و در نتیجه اگر $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2-i & 2+i \end{bmatrix}$ آنگاه داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-t+it} & 0 \\ 0 & e^{-t-it} \end{bmatrix} P^{-1}$$

با انجام ضرب ماتریسی اخیر در نهایت داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t & -e^{-t}\sin t \\ 5e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t \end{bmatrix}$$

که ماتریس اخیر در واقع ماتریس اساسی سیستم به ازای شرط اولیه $\Phi(0) = I$ میباشد. همانند قسمت های قبلی فرم

کلی ماتریس های اساسی سیستم به صورت :

$$\begin{bmatrix} e^{-t}\cos t + 2e^{-t}\sin t & -e^{-t}\sin t \\ 5e^{-t}\sin t & e^{-t}\cos t - 2e^{-t}\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

می باشد که در آن ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ماتریسی ثابت و وارون پذیر می باشد.

سوال ۵ مسئله مقدار اولیه زیر را با استفاده از ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در تمرین قبل ذکر شد حل کنید.

$$x' = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x \quad , \quad x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_1 = -1 + 2i, \lambda_2 = -1 - 2i$. بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه به ترتیب عبارتند از:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad Y_2 = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن $P = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ داریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} t) = P \begin{bmatrix} e^{-t+2ti} & 0 \\ 0 & e^{-t-2ti} \end{bmatrix} P^{-1}$$

البته در قسمت سوم از تمرین شماره ۱ خوشبختانه این ماتریس را محاسبه نموده ایم :

$$\exp(\begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\sin 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix}$$

حال کافیست شرط اولیه را از راست در ماتریس بالا ضرب نموده تا به جواب نهایی برسیم:

$$\Gamma(t) = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos 2t & -2e^{-t}\sin 2t \\ \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t & e^{-t}\cos 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-t}\cos 2t - 2e^{-t}\sin 2t \\ e^{-t}\cos 2t + \frac{3}{2}e^{-t}\sin 2t \end{bmatrix}$$

سوال ۶ دستگاه معادلات زیر جریان ولتاژ را در یک مدار الکتریکی توصیف می کند:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ V \end{bmatrix}$$

با فرض ثابت بودن پارامتر های مدار (اعداد R_1, R_2, C, L) به سوالات زیر پاسخ دهید:

- الف) شرایطی را روی R_1, R_2, C, L پیدا کنید که مقادیر ویژه ماتریس :

$$\begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix}$$

حقیقی و متمایز باشند.

- ب) نشان دهید اگر شرایط قسمت (الف) برقرار باشد هر دو مقدار ویژه ماتریس فوق منفی هستند. سپس نشان دهید $I(t), V(t) \to 0$ وقتی $t \to \infty$ (با هر شرط اولیه ای)

- ج) اگر شرایط قسمت (الف) برقرار نباشد آیا باز هم $I(t), V(t)$ در بینهایت به سمت صفر میل می کنند؟

پاسخ

- الف) مقادیر ویژه ماتریس مذکور از طریق معادله درجه دوم زیر یافت می شوند:

$$x^2 + (\frac{R_1}{L} + \frac{1}{CR_2})x + (\frac{R_1}{CR_2L} + \frac{1}{LC}) = 0$$

برای آنکه ریشه های معادله بالا حقیقی و متمایز باشند باید مبین معادله بالا اکیدا مثبت باشد:

$$\Delta = \frac{R_1^2}{L^2} + \frac{1}{C^2R_2^2} + \frac{2R_1}{CLR_2} - \frac{4R_1}{CR_2L} - \frac{4}{LC}$$

و در نتیجه:

$$\Delta = \frac{R_1^2}{L^2} + \frac{1}{C^2R_2^2} - \frac{2R_1}{CLR_2} - \frac{4}{LC} = \frac{(R_1R_2C - L)^2 - 4LCR_2^2}{C^2L^2R_2^2}$$

پس مقادیر ویژه ماتریس مذکور حقیقی و متمایز هستند اگر و فقط اگر:

$$(R_1R_2C - L)^2 > 4LCR_2^2$$

- ب) ابتدا می بینیم که با جایگذاری $L = C = 1$ و $R_1 = R_2 = -10$ مقدار ویژه مثبتی بدست می آوریم. پس فرض میکنیم که همه پارامترهای مسئله اعداد مثبتی باشند. پس جمع مقادیر ویژه باید عددی منفی و ضرب آن دو باید عددی مثبت باشد. چون جمع مقادیر ویژه عددی منفی است پس هر دو مقدار ویژه نمی توانند همزمان مثبت باشند و از آنجایی که ضرب این دو مقدار ویژه مثبت است نتیجه میگیریم که این دو مقدار ویژه هم علامت هستند و از آنجایی که حداقل یکی از این دو مقدار ویژه منفی می باشد نتیجه میگیریم که باید هر دو مقدار ویژه منفی باشند.

حال یک ماتریس اساسی برای سیستم مذکور در صورت مسئله برابر است با $\exp(\begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{bmatrix} t)$ و از آنجایی که مقادیر ویژه با شرایط قسمت (الف) و مثبت بودن تمام پارامتر ها متمایز و منفی می باشند نتیجه می شود که درایه های این ماتریس اساسی باید به شکل:

$$c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$$

باشند که λ_1, λ_2 مقادیر ویژه (منفی) ماتریس پارامتر ها می باشند. پس بوضوح تمام درایه های ماتریس اساسی بالا در بینهایت به سمت صفر میل می کنند و از آنجایی که هر جواب ستونی سیستم لزوما بصورت ترکیبی خطی از ستون های یک ماتریس اساسی سیستم بیان می شود نتیجه می شود که تمام مدار های سیستم مذکور در بینهایت به مبدا مختصات (نقطه صفر) میل می کنند.

- ج) اگر تمام پارامتر های مسئله مثبت باشند فارغ از اینکه شرایط قسمت (الف) برقرار باشد یا خیر باز هم نتیجه قسمت (ب) برقرار است. یعنی تمام مدارهای سیستم در بینهایت جذب مبدا مختصات می شوند. چرا که اگر $\Delta = 0$ آنگاه یک مقدار ویژه مضاعف منفی داریم مانند λ و درایه های هر ماتریس اساسی سیستم شکلی به صورت $c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}$ خواهد داشت و در نتیجه درایه های هر ماتریس اساسی در بینهایت به سمت صفر میل کرده و در نتیجه هر مدار دلخواه سیستم در بینهایت به سمت صفر میل میکند.

همچنین (باز با فرض مثبت بودن تمام پارامترها) اگر Δ منفی باشد نیز مقادیر ویژه λ_1, λ_2 مزدوج یکدیگر بوده و دارای قسمت حقیقی منفی می باشند و مثلا اگر به فرم $\alpha \pm \beta i$ باشند آنگاه درایه های هر ماتریس اساسی سیستم به صورت:

$$c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$$

می باشد که از آنجایی که $\alpha < 0$ نتیجه می شود که این درایه ها در بینهایت به سمت صفر میل میکنند. در نتیجه تمامی مدار های سیستم نیز در این حالت جذب مبدا می شوند. پس با فرض مثبت بودن پارامتر ها در هر شرایطی مبدا نقطه جاذب سیستم می باشد و فقط ممکن است نحوه میل کردن جواب ها به مبدا مختصات فرق داشته باشد (مثلا می توانند بطور مارپیچ به مبدا مختصات میل کنند).

ولی اگر پارامتر ها بتوانند منفی هم باشند همان مثالی که در ابتدای راه حل قسمت (ب) بیان شد مثالی است که در آن مداری وجود دارد که در بینهایت به سمت بینهایت میل کند (چرا که حداقل در این حالت یک مقدار ویژه مثبت داریم).

سوال ۷ نشان دهید تمام جواب های دستگاه زیر وقتی $t \to \infty$ به سمت صفر میل می کنند اگر و تنها اگر $ad - bc > 0$ و $a + d < 0$.

$$x' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} x$$

پاسخ ابتدا مباحثی را دوره می کنیم. ماتریس اساسی دستگاه ذکر شده برابر است با :

$$\exp(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} t)$$

همانطور که در تمارین قبل نیز مشاهده نمودیم بدست آوردن ماتریس بالا مرتبط می شود با بدست آوردن مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. به عبارت دقیق تر بر حسب مقادیر ویژه این ماتریس چهره ماتریس اساسی دستگاه مذکور با شرط اولیه همانی به یکی از صورت های زیر می شود:

اگر هر دو مقدار ویژه حقیقی باشند مثلا λ_1, λ_2 آنگاه درایه های این ماتریس فرمی به شکل $c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ خواهند داشت.

اگر یک مقدار ویژه (مضاعف) λ داشته باشیم آنگاه درایه های این ماتریس به شکل $c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t}$ می باشند.

اگر مقادیر ویژه مختلط باشند مثلا $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$ آنگاه درایه های این ماتریس به شکل زیر هستند:

$$c_1e^{\alpha t}\cos\beta t + c_2e^{\alpha t}\sin\beta t$$

از نظر رفتار مجانبی جوابهای سیستم یعنی وقتی $t \to \infty$ از آنجایی که جوابهای ستونی سیستم لزوما ترکیب های خطی ستون های یک ماتریس اساسی سیستم هستند نتیجه میگیریم که اگر ستون های ماتریس اساسی بطور مجانبی به سمت صفر میل کنند آنگاه همه جواب های سیستم بطور مجانبی به صفر میل می کنند. با توجه به حالت بندی هایی که در بالا انجام دادیم نتیجه می شود که رخ دادن چنین اتفاقی معادل است با اینکه قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ منفی باشند.

مقادیر ویژه ماتریس مذکور از طریق معادله زیر بدست می آید:

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0$$

به بیان دیگر اگر λ_1, λ_2 مقادیر ویژه باشند آنگاه روابط $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ و $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$ را داریم.

اکنون سه حالت را بررسی میکنیم:

اگر λ_1, λ_2 حقیقی و متمایز باشند آنگاه از آنجایی که $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ نتیجه می شود که هر دوی آنها با هم نمی توانند مثبت باشند. همچنین از رابطه $\lambda_1\lambda_2 > 0$ نیز اول نتیجه میشود که هیچ کدام از λ_1, λ_2 صفر نیستند و دوم اینکه λ_1, λ_2 هم علامت هستند و با توجه به اینکه حداقل یکی از آنها منفی می باشد نتیجه می شود که باید هر دوی λ_1, λ_2 منفی باشند.

اگر مقدار ویژه مضاعف داشته باشیم یعنی $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ آنگاه $2\lambda < 0$ و درنتیجه $\lambda < 0$.

اگر مقادیر ویژه به شکل $\lambda = \alpha \pm \beta i$ باشند نیز از رابطه $2\alpha < 0$ نتیجه می شود که $\alpha < 0$.

پس تا الان نتیجه گرفتیم که اگر $a + d < 0, ad - bc > 0$ آنگاه قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی خواهد بود (و در نتیجه تمام جواب های سیستم مذکور در بی نهایت به سمت صفر میل میکنند). همچنین با یک بررسی ساده (میتوان مانند همین حالت بندی بالا را انجام داد) می توان دید که اگر قسمت حقیقی مقادیر ویژه منفی باشند آنگاه لزوما روابط $a + d < 0$ و $ad - bc > 0$ را داریم.

اکنون مسئله حل شده می باشد.

سوال ۸ فرض کنید:

$$J=\begin{bmatrix}\lambda & ۱\\ ۰ & \lambda\end{bmatrix}$$

بطوریکه λ یک عدد دلخواه است.

- الف) نشان دهید:

$$J^n=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-۱}\\ ۰ & \lambda^n\end{bmatrix}$$

- ب) مطلوبست بدست آوردن $\exp(Jt)$
- ج) به کمک قسمت (ب) مسئله مقدار اولیه زیر را حل کنید:

$$x' = Jx \quad , \quad x(۰)=x_۰$$

پاسخ

- الف) ابتدا یک عدد دلخواه λ را تثبیت کنید. رابطه بیان شده را با استفاده از استقرا روی n نشان می دهیم. بوضوح رابطه برای $n=۱$ درست است. با فرض درستی رابطه برای عدد طبیعی k داریم:

$$J^{k+۱}=J^kJ=\begin{bmatrix}\lambda^k & k\lambda^{k-۱}\\ ۰ & \lambda^k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda & ۱\\ ۰ & \lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{k+۱} & \lambda^k+k\lambda^k\\ ۰ & \lambda^{k+۱}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^{(k+۱)} & (k+۱)\lambda^{(k+۱)-۱}\\ ۰ & \lambda^{(k+۱)}\end{bmatrix}$$

پس رابطه بیان شده در صورت سوال با فرض درستی برای عدد طبیعی k برای عدد طبیعی $k+۱$ نیز درست است و بنابر استقرا نتیجه می شود که رابطه برای هر عدد طبیعی n و هر عدد دلخواه λ درست است.

- ب) ابتدا ماتریس $(Jt)^n$ را محاسبه میکنیم. بنا بر قسمت (الف) داریم:

$$(Jt)^n=t^nJ^n=t^n\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-۱}\\ ۰ & \lambda^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda t)^n & n\lambda^{n-۱}t^n\\ ۰ & (\lambda t)^n\end{bmatrix}$$

عنصر واقع بر سطر اول و ستون دوم $\exp(Jt)$ با محاسبه زیر بدست می آید:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n}{n!}\lambda^{n-۱}t^n=t\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۱}{(n-۱)!}(\lambda t)^{n-۱}=te^{\lambda t}$$

و در نهایت:

$$\exp(Jt)=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\\ ۰ & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

- ج) مسئله مقدار اولیه مطرح شده دارای جواب یکتای :

$$\Phi(t)=\exp(Jt)x_۰$$

می باشد که با توجه به قسمت (ب) این جواب عبارت است از:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} x_0$$

سوال ۹ فرض کنید حرکت یک نوسانگر را بصورت زیر مدل کرده ایم:

$$u'' + \omega^2 u = 0 \quad , \quad u(0) = u_0 \quad , \quad u'(0) = v_0$$

- الف) فرض کنید $x_1 = u$ و $x_2 = u'$. معادله بالا را بصورت دستگاه زیر بنویسید:

$$x' = Ax \quad , \quad x(0) = x_0$$

که در آن A ماتریسی مربعی از مرتبه ۲ و x یک بردار ستونی ۲ بعدی است که مولفه های آن به ترتیب برابر با x_1, x_2 می باشد.

- ب) نشان دهید:

$$\exp(At) = I\cos(\omega t) + A\frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

- ج) جواب مسئله مقدار اولیه قسمت (الف) را بدست آورید.

پاسخ

- الف) اگر $x_1 = u$ آنگاه $x_1' = u' = x_2$ و از رابطه $x_2 = u'$ نیز نتیجه می شود که :

$$x_2' = u'' = -\omega^2 u = -\omega^2 x_1$$

پس دستگاه زیر را داریم:

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\omega^2 x_1 \end{cases}$$

که به زبان ماتریسی همراه با شروط اولیه داده شده مسئله مقدار اولیه زیر را القا می کند:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}$$

- ب) مقادیر ویژه ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$ عبارتند از $\lambda_1 = \omega i, \lambda_2 = -\omega i$. بردار های ویژه متناظر با این مقادیر ویژه به ترتیب عبارتند از

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \omega i \end{bmatrix} \quad , \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\omega i \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\exp(\begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ -\omega^۲ & \circ \end{bmatrix} t) = -\frac{۱}{۲\omega i}\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ \omega i & -\omega i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{i\omega t} & \circ \\ \circ & e^{-i\omega t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\omega i & -۱ \\ -\omega i & ۱ \end{bmatrix}$$

با انجام ضرب ماتریسی اخیر در نهایت بدست می آوریم:

$$\exp(\begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ -\omega^۲ & \circ \end{bmatrix} t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

و داریم:

$$\begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix} = I\cos\omega t + \begin{bmatrix} \circ & ۱ \\ -\omega^۲ & \circ \end{bmatrix}\frac{\sin\omega t}{\omega}$$

- ج) جواب دستگاه مقدار اولیه مذکور عبارت است از:

$$\gamma(t) = \begin{bmatrix} \cos\omega t & \frac{\sin\omega t}{\omega} \\ -\omega\sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_\circ \\ v_\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_\circ\cos\omega t + \frac{v_\circ}{\omega}\sin\omega t \\ v_\circ\cos\omega t - u_\circ\omega\sin\omega t \end{bmatrix}$$

و جواب مسئله اصلی عبارت است از مولفه اول بردار ستونی بدست آمده:

$$\eta(t) = u_\circ\cos\omega t + \frac{v_\circ}{\omega}\sin\omega t$$

سوال ۱۰ مسئله $x' = Ax$ را با شرط اولیه $x(\circ) = x_\circ$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\Phi(t)$ جواب اساسی دستگاه فوق باشد بطوریکه $\Phi'(t) = A\Phi(t)$ و $\Phi(\circ) = I$.

- الف) نشان دهید :

$$\Phi(t)\times\Phi(s) = \Phi(t+s) \quad , \quad \Phi(-t) = \Phi^{-۱}(t)$$

(منظور از " $\times$ " همان ضرب معمول دو ماتریس می باشد)

- ب) با استفاده از قسمت (الف) نشان دهید:

$$\exp(At)\times\exp(A(-t)) = I \quad , \quad \exp(At)\times\exp(As) = \exp(A(t+s))$$

پاسخ

- الف) ابتدا یک نکته ای را بطور مختصر بیان میکنیم که اگر $U(t), V(t)$ ماتریس های مربعی از مرتبه n باشند که درایه های آنها توابعی مشتق پذیر از t باشند آنگاه داریم:

$$\frac{d}{dt}(U(t)\times V(t)) = (\frac{d}{dt}U(t))\times V(t) + U(t)\times(\frac{d}{dt}V(t))$$

همچنین یادآور می شویم که برای ماتریس مربعی ثابت A و عدد حقیقی دلخواه t_0 مسئله مقدار اولیه :

$$X' = AX \quad , \quad X(t_0) = X_0$$

که در آن X_0 می تواند ماتریسی مربعی هم مرتبه با A یا ماتریسی ستونی از بعد مرتبه A باشد دارای جواب منحصر بفرد:

$$X(t) = (\exp(A(t - t_0)))X_0$$

می باشد. در این مسئله منحصر بفرد بودن جواب برای ما حائز اهمیت می باشد.

حال به مسئله بر میگردیم. بنا برفرض مسئله ماتریس مربعی $\Phi(t)$ در روابط زیر صدق میکند:

$$\Phi'(t) = A\Phi(t) \quad , \quad \Phi(0) = I$$

حال عدد حقیقی s_0 را دلخواه در نظر گرفته و آن را تثبیت کنید. دو تابع ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

$$\Gamma_1(t) = \Phi(t + s_0) \quad , \quad \Gamma_2(t) = \Phi(t) \times \Phi(s_0)$$

نشان می دهیم Γ_1, Γ_2 هر دو جواب های مسئله مقدار اولیه زیر هستند:

$$X' = AX \quad , \quad X(0) = \Phi(s_0)$$

ابتدا آنکه واضح است که $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = \Phi(s_0)$. همچنین :

$$\Gamma_1'(t) = (\Phi(t + s_0))' = \Phi'(t + s_0) = A\Phi(t + s_0) = A\Gamma_1(t)$$

و با استفاده از یادآوری در مورد مشتق ضرب دو ماتریس نیز داریم:

$$\Gamma_2'(t) = (\Phi(t) \times \Phi(s_0))' = (\Phi(t))' \times \Phi(s_0) = (A \times \Phi(t)) \times \Phi(s_0) = A \times (\Phi(t) \times \Phi(s_0)) = A\Gamma_2(t)$$

(توجه کنید که $\Phi(s_0)$ ماتریسی ثابت است). پس بنا بر منحصر بفرد بودن جواب مسئله داریم:

$$\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t)$$

و از آنجایی که s_0 را عدد حقیقی دلخواهی در نظر گرفته بودیم نتیجه میگیریم که برای هر دو عدد حقیقی t, s خواهیم داشت:

$$\Phi(t) \times \Phi(s) = \Phi(t + s)$$

بخصوص که در رابطه بالا میتوان قرار داد $s = -t$ و با توجه به اینکه $\Phi(0) = I$ داریم:

$$\Phi(t) \times \Phi(-t) = I \Rightarrow \Phi(-t) = (\Phi(t))^{-1}$$

- ب) این قسمت نتیجه مستقیم قسمت (الف) می باشد. چرا که در واقع جواب مسئله مقدار اولیه :

$$X' = AX \quad , \quad X(0) = I$$

چیزی نیست جز $\Phi(t) = \exp(At)$. با اعمال دو رابطه بدست آمده در قسمت (الف) بدست می آوریم:

$$\exp(At) \times \exp(As) = \exp(A(t+s)) \quad , \quad \exp(At) \times \exp(A(-t)) = I$$

سوال تکمیلی فرض کنید A, B دو ماتریس مربعی از مرتبه n باشند بطوریکه $AB = BA$. نشان دهید:

$$\exp(A) \times \exp(B) = \exp(B) \times \exp(A) = \exp(A+B)$$

پاسخ مسئله مقدار اولیه زیر را در نظر بگیرید:

$$X' = (A+B)X \quad , \quad X(0) = I$$

می دانیم جواب (منحصر بفرد) مسئله بالا عبارت است از $\exp((A+B)t)$. از طرفی دیگر نشان می دهیم که:

$$\Gamma(t) = \exp(At) \times \exp(Bt)$$

نیز یک جواب برای مسئله مقدار اولیه مذکور می باشد. واضح است که $\Gamma(0) = I$. همچنین :

$$\Gamma'(t) = (\exp(At))' \times \exp(Bt) + \exp(At) \times (\exp(Bt))'$$

که در نتیجه:

$$\Gamma'(t) = A(\exp(At) \times \exp(Bt)) + \exp(At) \times B \times \exp(Bt)$$

حال نکته ای که وجود دارد این است که با توجه به رابطه :

$$\exp(At) = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$$

نتیجه می شود که هرگاه $AB = BA$ آنگاه برای هر عدد حقیقی t داریم :

$$\exp(At) \times B = B \times \exp(At)$$

و با بکار گیری این تساوی در رابطه قبلی آن نتیجه می شود:

$$\Gamma'(t) = (A+B)(\exp(At) \times \exp(Bt))$$

در نتیجه بنابر یکتایی جواب برای هر عدد حقیقی t خواهیم داشت $\exp(At) \times \exp(Bt) = \exp((A+B)t)$. با جایگذاری $t = ۱$ داریم:

$$\exp(A) \times \exp(B) = \exp(A+B) = \exp(B+A) = \exp(B) \times \exp(A)$$

سوال تکمیلی

- الف) فرض کنید A ماتریسی مربعی و بالا مثلثی از مرتبه n با درایه های مختلط باشد که درایه های قطر اصلی آن به ترتیب برابر با $a_{۱۱}, \ldots, a_{nn}$ است.نشان دهید $\exp(A)$ نیز ماتریسی بالا مثلثی است که درایه های قطر اصلی آن به ترتیب برابر با $e^{a_{۱۱}}, \ldots, e^{a_{nn}}$ می باشد.

- ب) فرض کنید A ماتریسی مربعی از مرتبه n با درایه های مختلط باشد. این عبارت را دانسته فرض کنید : ماتریس های مربعی از مرتبه n با درایه های مختلط P و B وجود دارند به قسمی که P وارون پذیر است و B بالا مثلثی است و :

$$A = P^{-۱}BP$$

حال فرض کنید A ماتریسی مربعی باشد. نشان دهید:

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{Tr} A)$$

پاسخ

- الف) فرض کنید A, B ماتریس هایی بالا مثلثی با درایه های مختلط باشند. درایه های A را با a_{ij} و درایه های B را با b_{ij} نمایش دهید. پس اگر $i > j$ آنگاه $a_{ij} = b_{ij} = ۰$.

حال درایه واقع بر سطر i و ستون i ماتریس $A \times B$ برابر است با:

$$c_{ii} = \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} b_{ji}$$

اگر $i > j$ آنگاه $a_{ij} = ۰$ و اگر $j > i$ آنگاه $b_{ji} = ۰$. در نتیجه در جمع بندی بالا همه جملات برابر هستند با صفر به جز احتمالا جمله متناظر با اندیس i که برابر می شود با $a_{ii} b_{ii}$.

مبحث اخیر نشان می دهد که در ضرب دو ماتریس بالا مثلثی از مرتبه یکسان درایه واقع بر سطر i و ستون i بر اثر ضرب شدن درایه های واقع بر سطر i و ستون i دو ماتریس پدید می آید. در نتیجه اگر $a_{۱۱}, \ldots, a_{nn}$ عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس بالا مثلثی A باشند آنگاه عناصر واقع بر قطر اصلی ماتریس A^k عبارتند از $a_{۱۱}^k, \ldots, a_{nn}^k$. همچنین برای $i > j$ درایه c_{ij} از $A \times B$ عبارت است از:

$$c_{ij} = \sum_{k=۱}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

اگر $i > k$ آنگاه $a_{ik} = 0$ و اگر $k \geq i$ آنگاه $k > j$ و در نتیجه $b_{kj} = 0$ که این مباحث نتیجه می دهد که $c_{ij} = 0$. صحبت های بالا نشان می دهد که اگر A ماتریسی بالا مثلثی با عناصر قطری $a_{11}, ..., a_{nn}$ باشد آنگاه A^k نیز ماتریسی بالا مثلثی می باشد که عناصر قطری آن برابر است با $a_{11}^k, ..., a_{nn}^k$. به واسطه رابطه:

$$\exp(A) = I + A + \frac{A^2}{2!} + ...$$

نتیجه می شود که $\exp(A)$ ماتریسی بالا مثلثی می باشد که عناصر قطری آن عبارتند از $e^{a_{11}}, ..., e^{a_{nn}}$.

- ب) ماتریس های P, B را به قسمی در نظر بگیرید که P وارون پذیر و B بالا مثلثی باشد و $A = PBP^{-1}$ و مثلا عناصر قطر اصلی B عبارت باشد از $b_{11}, ..., b_{nn}$. پس :

$$\operatorname{Tr} B = b_{11} + b_{22} + ... + b_{nn}$$

همچنین از آنجایی که رابطه $\operatorname{Tr} PXP^{-1} = \operatorname{Tr} X$ برای هر دو ماتریس مربعی P, X که P وارون پذیر باشد برقرار است نتیجه میگیریم که $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B$. حال داریم:

$$\exp(A) = P(\exp(B))P^{-1} \Rightarrow \det \exp(A) = \det \exp(B)$$

اما طبق قسمت (الف) می دانیم که $\exp(B)$ ماتریسی بالا مثلثی است که عناصر قطر اصلی آن عبارتند از $e^{b_{11}}, ..., e^{b_{nn}}$ و از آنجایی که دترمینان ماتریس های مثلثی برابر است با ضرب عناصر قطر اصلی آن ماتریس خواهیم داشت:

$$\det \exp(B) = e^{b_{11} + b_{22} + ... + b_{nn}} = e^{\operatorname{Tr} A}$$

و در نهایت خواهیم داشت:

$$\det \exp(A) = e^{\operatorname{Tr} A}$$

سوال تکمیلی فرض کنید $A(t)$ ماتریسی مربعی باشد که درایه های آن توابعی پیوسته می باشد که روی $\mathbb{R}$ تعریف شده اند. فرض کنید برای هر عدد حقیقی t داشته باشیم:

$$A(t)(\int_0^t A(s)ds) = (\int_0^t A(s)ds)A(t)$$

نشان دهید مسئله مقدار اولیه:

$$X' = A(t)X \quad , \quad X(0) = X_0$$

دارای جواب یکتای:

$$X(t) = (\exp(\int_{\circ}^{t} A(s)ds))X_{\circ}$$

می باشد.

پاسخ یکتایی جواب از قضایای مربوط به وجود و یکتایی نتیجه می شود. فقط باید بررسی کنیم که تابع داده شده در معادله صدق می کند. همچنین واضح است که تابع داده شده در صورت سوال در شرط مقدار اولیه $X(\circ) = X_{\circ}$ صدق می کند.

قبل از اینکه بطور مستقیم به بررسی صحت رابطه بیان شده بپردازیم ابتدا نکته ای را (که تعمیم نکته بیان شده در سوال ۱۰ می باشد) بیان می کنیم. فرض کنید $A_{۱}(t), ..., A_{m}(t)$ ماتریس هایی مربعی و هم مرتبه باشند که درایه های آن ها توابعی مشتق پذیر از t می باشند. داریم:

$$\frac{d}{dt}(A_{۱}(t) \times ... \times A_{m}(t)) = \sum_{i=۱}^{m} A_{۱}(t) \times .... \times (\frac{d}{dt}A_{i}(t)) \times .... \times A_{m}(t)$$

بخصوص که:

$$\frac{d}{dt}A^{k}(t) = A^{'}(t) \times A(t) \times .... \times A(t) + A(t) \times A^{'}(t) \times .... \times A(t) + ... + A(t) \times A(t) \times .... \times A^{'}(t)$$

در حالت خاص اگر ماتریس $A(t)$ با مشتق خود یعنی ماتریس $A^{'}(t)$ به ازای هر t جابجا شود خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}A^{k}(t) = kA^{'}(t)A^{k-۱}(t)$$

در مسئله ای که با آن سروکار داریم نیز همین حالت خاص فرض شده است. یعنی فرض شده که $\int_{\circ}^{t} A(s)ds$ با مشتق خود یعنی $A(t)$ جابجا می شود. با مشتق گیری از طرفین رابطه:

$$(\exp(\int_{\circ}^{t} A(s)ds))X_{\circ} = (\sum_{k=\circ}^{\infty} \frac{(\int_{\circ}^{t} A(s)ds)^{k}}{k!})X_{\circ}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dt}(\exp(\int_{\circ}^{t} A(s)ds))X_{\circ} = (\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(kA(t) \int_{\circ}^{t} A(s)ds)^{k-۱}}{k!})X_{\circ} = A(t)(\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{(\int_{\circ}^{t} A(s)ds)^{k-۱}}{(k-۱)!})X_{\circ}$$

پس در نهایت داریم:

$$\frac{d}{dt}(\exp(\int_{\circ}^{t} A(s)ds))X_{\circ} = A(t)(\exp(\int_{\circ}^{t} A(s)ds))X_{\circ}$$

و درستی رابطه بررسی می شود.

در مورد سوال ۸ از سری اول تمارین معادلات دیفرانسیل

در راه حل دومی که برای سوال ۸ قسمت (ب) ارائه گردیده می باشد از این واقعیت هندسه مسطحه استفاده شد که دو بردار عمود بر یک بردار خود با هم موازی هستند و عدد K را طوری در نظر گرفتیم که یکی از آن بردار ها K برابر دیگری باشد. مسئله آنجاست که از آنجایی که بردار ها وابسته به t تغییر میکنند هیچ دلیلی وجود ندارد که K مستقل از t باشد و K میتواند تابعی از t باشد. برای اصلاح این راه حل بدین صورت عمل میکنیم : همچنان فرض کنید $(x(t), y(t))$ یک پرمایش از دایره $x^2 + y^2 = c$ باشد و خم $(u(s), v(s))$ خم مجهول باشد. فرض کنید این دو خم در نقطه (x_0, y_0) تقاطع دارند. یعنی به ازای t_0, s_0 ای داشته باشیم:

$$\begin{cases} (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0) \\ \\ (u(s_0), v(s_0)) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

و در این نقطه تقاطع بر هم عمود باشند. پس همانند استدلال انجام شده در سری اول تمارین نتیجه می شود که بردار های $(u'(s_0), v'(s_0))$ و $(x_0, y_0) = (u(s_0), v(s_0))$ با یکدیگر موازی هستند. پس دو بردار:

$$(u(s_0), v(s_0), 0) \quad , \quad (u'(s_0), v'(s_0), 0)$$

نیز در فضای ۳ بعدی با یکدیگر موازی بوده و در نتیجه باید ضرب خارجی آنها برابر با صفر باشد. با انجام دادن این ضرب خارجی به رابطه زیر می رسیم:

$$u'(s_0)v(s_0) - v'(s_0)u(s_0) = 0$$

و از آنجایی که با تغییرات پیوسته c تغییرات پیوسته s_0 را نیز شاهد هستیم پس برای هر s داریم:

$$u'(s)v(s) - v'(s)u(s) = 0$$

اما رابطه بالا نتیجه می دهد که مشتق تابع $\frac{u(s)}{v(s)}$ برابر با صفر می شود و در نتیجه به ازای ثابتی مانند K داریم:

$$\frac{u(s)}{v(s)} = K$$

و در نتیجه خم $(u(s), v(s))$ یک پرمایش خط گذرا از مبدا با شیب K می باشد و در نتیجه خانواده متعامد بر دوایر صورت سوال برابر با خانواده تمام خطوط گذرا از مبدا می باشد.