بسمه تعالی

پاسخنامه سری اول تمارین

درس معادلات دیفرانسیل

اسفند ۹۸

سوال ۱ یک میله فلزی با دمای ۱۰۰ درجه فارنهایت در اتاقی با دمای ثابت ۰ درجه فارنهایت قرار داده می شود. معادله دیفرانسیل مربوط به دمای میله فلزی را در صورتی که تغییرات دما متناسب با اختلاف دمای میله و محیط باشد (قانون تبرید نیوتن) به دست آورید. سعی کنید جواب کلی معادله دیفرانسیل بدست آمده را حدس بزنید.

اگر بعد از ۲۰ دقیقه دمای میله به ۵۰ درجه فارنهایت برسد لحظه ای را پیدا کنید که دمای میله به ۲۵ درجه فارنهایت کاهش می یابد.

پاسخ فرض کنید $T(t)$ مشخص کننده دمای میله در لحظه t باشد که بر حسب واحد فارنهایت سنجیده می شود و t نیز بر حسب دقیقه سنجیده می شود. بنا بر فرض مسئله داریم $T(۰) = ۱۰۰$. بنا بر خواسته مسئله باید معادله دیفرانسیلی بیابیم که T در آن صدق کند. از آنجایی که تغییرات دمای میله متناسب با اختلاف دمای میله و محیط است نتیجه می شود که عدد ثابت K وجود دارد به قسمی که برای هر زمان t داریم:

$$\frac{d}{dt}T(t) = K(۰ - T(t)) = -KT(t)$$

و در نتیجه T در معادله دیفرانسیل $T^{'}(t) = -KT(t)$ صدق می کند. اگر قرار دهیم $T(t) = Ce^{-Kt}$ که در آن C یک عدد دلخواه است آنگاه داریم:

$$T^{'}(t) = -CKe^{-Kt} = -K(Ce^{-Kt}) = -KT(t)$$

و در نتیجه خانواده $T(t) = Ce^{-Kt}$ جواب های معادله بدست آمده می باشند.

اکنون بنا بر فرض مسئله داریم $Ce^{-K(۰)} = T(۰) = ۱۰۰$ و در نتیجه $C = ۱۰۰$. پس دمای میله طبق رابطه $T(t) = ۱۰۰e^{-Kt}$ در دقیقه t تغییر می کند. از طرفی دیگر طبق فرض مسئله داریم $T(۲۰) = ۵۰$ که نتیجه می دهد:

$$۵۰ = T(۲۰) = ۱۰۰e^{-۲۰K} \Rightarrow e^{-۲۰K} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲۰K = -\ln ۲ \Rightarrow K = \frac{۱}{۲۰}\ln ۲$$

حال فرض کنید s زمانی باشد که در آن $T(s) = ۲۵$. پس $۱۰۰e^{-Ks} = ۲۵$ و در نتیجه:

$$e^{-Ks} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow -Ks = -\ln ۴ = -۲\ln ۲ \Rightarrow Ks = ۲\ln ۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲۰}s(\ln ۲) = ۲\ln ۲ \Rightarrow \frac{s}{۲۰} = ۲ \Rightarrow s = ۴۰$$

پس چهل دقیقه زمان می برد تا دمای میله به ۲۵ درجه فارنهایت نزول کند.

سوال ۲ شکار و شکارچی: دستگاه معادلات دیفرانسیل که بیانگر جمعیت شکار و شکارچی در حضور هم هستند را با فرضیات زیر بدست آورید:

- الف) نرخ رشد شکار در غیاب شکارچی متناسب با جمعیت شکار در آن لحظه باشد.
- ب) نرخ مرگ و میر شکارچی در غیاب شکار متناسب با جمعیت شکارچی در آن لحظه می باشد.
- ج) نرخ تغییر جمعیت شکار و شکارچی در حضور هم متناسب با ضرب جمعیت شکار و شکارچی در آن لحظه می باشد.

پاسخ فرض کنید $x(t)$ بیانگر جمعیت شکار در لحظه t و $y(t)$ بیانگر جمعیت شکارچی در لحظه t باشد. بنا بر مفروضات (الف) و (ج) نتیجه می شود که اعداد ثابت α, β وجود دارند به قسمی که:

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha + \beta y)$$

و بنابر مفروضات (ب) و (ج) نتیجه می شود که اعداد ثابت δ, γ وجود دارند به قسمی که:

$$\frac{dy}{dt} = y(\delta + \gamma x)$$

پس مسئله را می توان با دستگاه معادلات زیر مدل سازی نمود که در آن $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ ثابت هستند:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x + \beta xy \\ \dfrac{dy}{dt} = \delta y + \gamma xy \end{cases}$$

دستگاه معادلات بالا به مدل شکار و شکارچی یا معادلات لوتکا-ولترا معروف می باشد. معمولا رسم بر آن است که اعداد α, γ مثبت و اعداد β, δ منفی در نظر گرفته می شوند تا نوعی تعادل در سیستم لحاظ شود.

سوال ۳ قانون ارشمیدس: به جسم شناور در مایع نیرویی برابر با وزن حجمی از مایع وارد می شود که جسم در آن اشغال کرده است. می خواهیم معادله حرکت جسمی را که در آب غوطه ور است به کمک قانون دوم نیوتن $F = ma$ به دست آوریم. (نیروی وارد شده به جسم برآیند نیروی وزن جسم و نیروی وارد شده از مایع به آن است.)

پاسخ فرض کنید M یک جسم با جرم m باشد که در مایعی غوطه ور می باشد و فرض کنید جسم M در $\mathbb{R}^۳$ واقع است و M در سطح مایع که این سطح را با صفحه xy در $\mathbb{R}^۳$ مطابقت می دهیم غوطه ور باشد (پس در واقع عمق این مایع متناظر با $z < ۰$ می باشد). فرض کنید:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

بردار مکان M در لحظه t باشد (برای آنکه به جسم M بطور نقطه ای نگاه کنیم M را با مرکز جرمش یکی بگیرید. یعنی در واقع بردار اخیر بردار مکان مرکز جرم M است) و فرض کنید $\vec{F}(t)$ بردار نیروی وارد شده بر M در لحظه t باشد. با تجزیه $\vec{F}$ به مولفه های x, y, z داریم:

$$\vec{F}(t) = F_1(t)\vec{i} + F_2(t)\vec{j} + F_3(t)\vec{k}$$

اکنون قانون دوم نیوتن را بر روی هر کدام از مولفه ها اعمال میکنیم.داریم:

$$\begin{cases} F_1(t) = m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} \\ F_2(t) = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} \\ F_3(t) = m\dfrac{d^2z(t)}{dt^2} \end{cases}$$

حال $\vec{F}(t)$ را بدست می آوریم. فرض کنید **تنها** نیروهایی که بر جسم M وارد می شوند نیروهای ناشی از وزن و ناشی از مایعی باشد که M در آن غوطه ور می باشد (که در واقع بطور شهودی نتیجه می دهد که جسم در راستای محور های x, y حرکت ندارد و فقط حرکت عمودی دارد). همانطور که در صورت سوال ذکر شده است بردار $\vec{F}(t)$ در واقع برآیند وزن جسم و نیروی وارد شده از مایع به آن است. اگر g ثابت گرانش باشد در لحظه t وزن M در راستای قائم رو به پایین می باشد. پس اگر $\vec{G}(t)$ وزن M در لحظه t باشد داریم:

$$\vec{G}(t) = -mg\vec{k}$$

فرض کنید $\vec{H}(t)$ نیروی وارد شده بر M در لحظه t متاثر از مایعی باشد که M در آن غوطه ور می باشد. بنابر قانون ارشمیدس این نیرو در راستای مخالف با وزن M است و اندازه آن برابر است با وزن جرمی از جسم M که در مایع اشغال شده است. پس فرض کنید $\mu(t)$ جرمی از M در لحظه t باشد که در مایع اشغال شده است. پس داریم:

$$\vec{H}(t) = \mu(t)g\vec{k}$$

و در نتیجه:

$$\vec{F}(t) = \vec{G}(t) + \vec{H}(t) = (\mu(t) - m)g\vec{k}$$

از آنجایی که M فقط در راستای محور z ها حرکت دارد می توان $x(t)$ و $y(t)$ را ثابت در نظر گرفت. پس مثلا $x(t) = x_0$ و $y(t) = y_0$. همچنین برای مولفه $z(t)$ با توجه به روابط بدست آمده داریم:

$$(\mu(t) - m)g = m\frac{d^2z(t)}{dt^2}$$

و در نتیجه معادله :

$$\frac{d^۲z(t)}{dt^۲} = g(\frac{\mu(t)}{m} - ۱)$$

معادله دیفرانسیلی است که حرکت جسم M در مایع را توصیف می کند. البته در اینجا $\mu(t)$ میتواند صراحتا بر حسب تابعی از t داده شده باشد یا خود تابعی از تغییرات بردار مکان (یا معادلا تغییرات $z(t)$) یا ... باشد.

مدل سازی اخیر را با یک مثال توضیح می دهیم. فرض کنید جسم شناور بر مایع M یک استوانه صلب با مقطع دایره ای به شعاع r سانتی متر و ارتفاع h سانتی متر باشد. فرض کنید جرم این استوانه m گرم باشد و فرض کنید جرم استوانه با چگالی ثابت ρ که بر حسب گرم بر سانتی متر مکعب اندازه گیری می شود در استوانه توزیع شده باشد. همچنین فرض کنید حرکت استوانه روی مایع بدین صورت باشد که همواره بطور قائم نسبت به سطح مایع باشد (در واقع به زبان محاوره ای استوانه روی مایع کج و راست نمی شود). همچنان فرض کنید تنها نیروهای وارد شده بر این استوانه ناشی از وزن استوانه و نیروی ناشی از مقدار مایعی است که قسمتی از استوانه در آن قرار دارد. فرض کنید $z(t)$ تابعی از زمان t باشد که در زمان t ارتفاعی از استوانه M را اندازه گیری می کند که درون مایع قرار گرفته می باشد.

برای محاسبه $\mu(t)$ در این حالت توجه داریم که یک رابطه برای بدست آوردن جرم آن است که جرم برابر می شود با چگالی ضرب در حجم. از طرفی در لحظه t حجمی از استوانه که درون آب قرار دارد برابر می شود با $\pi r^۲ z(t)$ و در نتیجه:

$$\mu(t) = \pi r^۲ z(t) \rho$$

همچنین داریم $m = \pi r^۲ h \rho$. در نتیجه معادله بدست آمده برای چنین استوانه طبق آنچه که بدست آوردیم عبارت است از:

$$\frac{d^۲z(t)}{dt^۲} = g(\frac{z(t)}{h} - ۱)$$

سوال ۴ در یک دستگاه مهندسی و کاربردی کاملا طبیعی است که فرض کنیم دستگاه نه تنها متاثر از حالت های کنونی است بلکه وابسته به حالت های پیشینی نیز هست. این وابستگی به گذشته به شکل تاخیر در مدل آن دستگاه ظاهر می شود. برای مثال یکی از کاستی های مدل های $\frac{du}{dt} = f(u)$ این است که آهنگ تولد در این گونه مدل ها به صورت آنی است در حالی که باید زمانی برای رسیدن به بلوغ زمانی برای دوره بارداری و... در مدل رشد جمعیت منظور شود. مدلی را به صورت معادله دیفرانسیل برای این حالت بنویسید.

پاسخ فرض کنید u دستگاهی باشد که نه تنها تغییراتش به حالت کنونی دستگاه بستگی دارد بلکه به حالت های قبلی دستگاه نیز وابسته است. یک طریقی که می توان چنین دستگاه u ای را مدل کرد بدین صورت است: فرض کنید $s_i(t)$ توابعی

از t باشند که $s_i(t) < t$. دستگاه :

$$\frac{d}{dt}u(t) = f(t, u(t), u(s_۱(t)), u(s_۲(t)), ..., u(s_n(t)))$$

سیستمی را توصیف می کند که در آن تغییرات سیستم نه تنها به زمان کنونی و وضعیت دستگاه در حالت کنونی بستگی دارد بلکه به وضعیت دستگاه در زمان های گذشته نیز بستگی دارد. حتی می توان در مورد مرتبه کوچکی $s_i(t)$ ها نسبت به t نیز بحث نمود. مثلا $s_i(t)$ ها بطور مجانبی خیلی کند تر از t به سمت بینهایت میل کنند.

سوال ۵ ۵۰۰ موش در آزمایشگاه در یک محیط نگهداری می شوند که ۵ تای آنها دارای بیماری واگیردار هستند. اگر نرخ رشد بیماری متناسب با تعداد جمعیت موش های بیمار در آن لحظه ضربدر موش های سالم در همان لحظه باشد معادله دیفرانسیل مربوط به این مدل را بنویسید. با فرضیات بالا اگر با وجود واکسیناسیون نرخ رشد بیماری با معکوس تعداد موش های بیمار هم متناسب باشد مدل جدید را بدست آورید.

پاسخ فرض کنید $H(t)$ معرف تعداد موش های سالم در لحظه t و $I(t)$ معرف تعداد موش های بیمار در لحظه t باشد. از مفروضات مسئله نتیجه می شود که $H(t) + I(t) = ۵۰۰$ و $H(۰) = ۴۹۵$ و $I(۰) = ۵$. از آنجایی که سرعت رشد بیماری متناسب با جمعیت موش های بیمار ضرب در جمعیت موش های سالم می باشد نتیجه می شود که عدد ثابت K وجود دارد به قسمی که برای هر t داریم:

$$\frac{d}{dt}I(t) = KI(t)(۵۰۰ - I(t))$$

در صورتی که سرعت رشد بیماری با وارون تعداد موش های بیمار هم متناسب باشد معادله دیفرانسیل مربوط به این مدل عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}I(t) = KI(t)(۵۰۰ - I(t)) - \frac{C}{I(t)}$$

که در آن C یک ضریب تناسب می باشد.

سوال ۶ یک مخزن با ظرفیت ۵۰ گالن با مقدار اولیه ۱۰ گالن از آب خالص را در نظر بگیرید. در لحظه $t = ۰$ آب شوری شامل ۱ پوند نمک در هر گالن با دبی ۴ گالن بر دقیقه به مخزن در حال اضافه شدن است. در همین حال شیر خروجی مخلوط را با دبی ۲ گالن بر دقیقه خارج می کند.

- الف) در چه لحظه ای مخزن پر می شود؟

پاسخ فرض کنید $A(t)$ بیانگر مقدار مخلوط موجود در گالن در لحظه t باشد. پس $A(۰) = ۱۰$. فرض کنید $B(t)$ بیانگر مقدار خارج شده از گالن در لحظه t باشد. پس طبق فرض داریم $B(۰) = ۰$ و $\frac{d}{dt}B(t) = ۲$ که نتیجه می دهد

$B(t)=2t$. فرض کنید $C(t)$ مقدار آب شوری در لحظه t باشد که وارد مخزن شده. پس بنا بر فرض $C(0)=0$ و $\frac{d}{dt}C(t)=4$ که نتیجه می دهد $C(t)=4t$. حال به فرض آنکه تلفات نداشته باشیم مخلوط درون مخزن در لحظه t با ضابطه $C(t)+10$ بدست می آید. ولی حالا که بنابر فرض مسئله تلفاتی نیز داریم مقدار مخلوط درون مخزن در لحظه t طبق ضابطه زیر حاصل می شود:

$$A(t)=10+C(t)-B(t)=10+4t-2t=10+2t$$

حال باید زمان t را به قسمی بیابیم که $A(t)=50$ که بوضوح جواب $t=20$ را بدست می آوریم. پس ۲۰ دقیقه زمان لازم است تا مخزن پر شود.

- ب) معادله دیفرانسیلی برای به دست آوردن مقدار نمک در مخزن در لحظه t بدست آورید.

پاسخ فرض کنید $Q(t)$ بیانگر مقدار نمک در گالن در لحظه t باشد. نرخ تغییرات نمک در گالن در لحظه t برابر است با تفاضل نرخ نمک ورودی و نرخ نمک خروجی از گالن در لحظه t. بنا بر فرض مسئله آب شور ورودی با نرخ ۴ گالن بر دقیقه وارد مخزن می شود که در هر گالن نیز این آب شور یک پوند نمک در خود دارد. پس نرخ نمک ورودی در گالن برابر می شود با $4\times 1=4$. همانطور که در قسمت (الف) محاسبه نمودیم دیدیم که در لحظه t مقدار آب داخل مخزن برابر با $10+2t$ گالن می باشد که از قضا $Q(t)$ پوند نمک در خود دارد. حال با یک جدول تناسب گیری ساده نتیجه میشود که در یک گالن از این مخزن باید $\frac{Q(t)}{10+2t}$ پوند نمک باشد که بنا بر فرض مسئله با سرعت ۲ گالن بر دقیقه از مخزن خارج میشود. پس نرخ تلفات نمک برابر می شود با $\frac{2Q(t)}{10+2t}$ و در نتیجه:

$$\frac{dQ(t)}{dt}=4-\frac{2Q(t)}{10+2t}$$

و معادله بالا یک معادله دیفرانسیل برای تعیین مقدار نمک موجود در مخزن در لحظه t می باشد.

سوال ۷ شخصی به بانکی رفته و حساب جدیدی با ۱۰۰۰ دلار ایجاد می کند. بعد از ۷ سال با فرضیات زیر پول او چقدر خواهد شد؟ در سه سال اول نرخ سود برابر با ۵.۸ و در چهار سال باقیمانده برابر با ۲۵.۹ درصد می باشد. معادله دیفرانسیلی برای مدل بالا بدست آورید.

پاسخ فرض کنید $R(t)$ بیانگر مقدار پول شخص در لحظه t باشد. بنا بر فرض داریم $R(0)=1000$. به ازای $0<t<3$ بنا بر فرض مسئله داریم:

$$\frac{dR(t)}{dt}=\frac{58}{1000}R(t)$$

که با احتساب شرط اولیه معادله بالا دارای جواب $R(t) = ۱۰۰۰e^{\frac{۵۸}{۱۰۰۰}t}$ می باشد. در نتیجه:

$$R(۳) = ۱۰۰۰e^{\frac{۱۷۴}{۱۰۰۰}} \approx ۱۱۹۰.۰۵۵۵۶۵۸۲۰۳۶$$

اکنون در ۴ سال باقیمانده پول اولیه برابر است با مقدار $R(۳)$ که در بالا محاسبه گردید و اگر در بازه $۰ < s < ۴$ تابع $Q(s)$ را مقدار پول در لحظه s در نظر گیریم داریم $Q(۰) = R(۳)$ و بنا بر فرض مسئله :

$$\frac{dQ(s)}{ds} = \frac{۲۵۹}{۱۰۰۰}Q(s)$$

که با توجه به شرط اولیه جواب $Q(s) = Q(۰)e^{\frac{۲۵۹}{۱۰۰۰}s}$ را بدست می آوریم. اکنون داریم:

$$Q(۴) = Q(۰)e^{۱+\frac{۳۶}{۱۰۰۰}} \approx ۳۳۵۳.۴۸۴۶۵۲۵۴۹۰۲$$

پس شخص در مدت ۷ سال تقریبا ۳۳۵۳.۵ دلار پول در بانک خواهد داشت.

سوال ۸ دسته منحنی های $g(x, y) = c$ را در نظر بگیرید (منظور آن است که با تثبیت c معادله $g(x, y) = c$ معرف یک خم می باشد و حال با تغییر c خانواده ای از خم ها را بدست می آوریم). مسیر های متعامد این دسته منحنی دسته منحنی هایی به صورت $f(x, y) = c$ هستند که منحنی های دسته اول را با زاویه قائم قطع می کنند. نشان دهید دسته منحنی های قائم منحنی های $x^۲ + y^۲ = c$ برابر است با $y = mx$.

پاسخ اول فرض کنید دسته منحنی های $f(x, y) = c$ دارای این ویژگی هستند که دسته منحنی های $x^۲ + y^۲ = c$ را در زاویه قائم قطع می کنند. یک عدد (مثبت) c و یک عدد دلخواه d را تثبیت کنید. پس منحنی $f(x, y) = d$ منحنی $x^۲ + y^۲ = c$ را در زاویه قائم قطع می کند. فرض کنید $(x(t), y(t))$ یک پرمایش برای منحنی $x^۲ + y^۲ = c$ و $(u(s), v(s))$ نیز یک پرمایش برای خم $f(x, y) = d$ باشد. پس روابط زیر را داریم:

$$(x(t))^۲ + (y(t))^۲ = c$$

$$f(u(s), v(s)) = d$$

فرض کنید دو منحنی مذکور همدیگر را در نقطه $(x_۰, y_۰)$ قطع کنند و بعلاوه در این نقطه تقاطع بر هم عمود باشند. پس به ازای $t_۰$ و $s_۰$ ای داریم:

$$(x(t_۰), y(t_۰)) = (x_۰, y_۰)$$

$$(u(s_\circ), v(s_\circ)) = (x_\circ, y_\circ)$$

اکنون بردار مماس بر دو منحنی را در نقطه $(x_\circ, y_\circ)$ محاسبه می کنیم.برای دسته خم اول با مشتق گیری از طرفین داریم:

$$۲x(t_\circ)x^{'}(t_\circ) + ۲y(t_\circ)y^{'}(t_\circ) = \circ \Rightarrow (x_\circ, y_\circ).(x^{'}(t_\circ), y^{'}(t_\circ)) = \circ$$

و برای منحنی دسته دوم با استفاده از قاعده زنجیری (ریاضی ۲) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ)u^{'}(s_\circ) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)v^{'}(s_\circ) = \circ$$

و در نتیجه:

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ), \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)).(u^{'}(s_\circ), v^{'}(s_\circ)) = \circ$$

حال از شرط عمود بودن دو منحنی نتیجه می شود که $(x^{'}(t_\circ), y^{'}(t_\circ)).(u^{'}(s_\circ), v^{'}(s_\circ)) = \circ$ و از روابط بالا به همراه مباحث مقدماتی از هندسه مسطحه نتیجه می شود که:

$$(\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ), \frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ)).(x_\circ, y_\circ) = \circ \Rightarrow x_\circ\frac{\partial f}{\partial x}(x_\circ, y_\circ) + y_\circ\frac{\partial f}{\partial y}(x_\circ, y_\circ) = \circ$$

و با تغییرات پیوسته c که منجر به تغییرات پیوسته خم های $x^۲ + y^۲ = c$ و در نتیجه تغییرات پیوسته نقاط تقاطع $(x_\circ, y_\circ)$ می شود معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی زیر را بدست می آوریم:

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \circ$$

با در نظر گرفتن تابع $f(x, y) = K + P\frac{y}{x}$ که در آن P, K اعداد ثابت دلخواهی هستند به راحتی مشاهده می شود که این تابع در معادله دیفرانسیل بالا صدق می کند و در نتیجه خانواده خم های متعامد بر خانواده خم های $x^۲ + y^۲ = c$ توسط رابطه :

$$K + P\frac{y}{x} = d$$

توصیف می شود و اگر رابطه را ساده تر کنیم خانواده خم های :

$$y = \frac{d - K}{P}x = mx$$

را بدست خواهیم آورد.

پاسخ دوم در این پاسخ به جای آنکه خانواده خم مجهول را بصورت $f(x,y)=d$ در نظر بگیریم خود خم را مجهول قرار می دهیم. به عبارت دقیق تر مسئله را اینطور بیان می کنیم که میخواهیم خم $(u(s),v(s))$ را طوری بدست آوریم که خانواده خم های $x^۲+y^۲=c$ را در زاویه قائم قطع کند. همانند راه حل اول فرض کنید $(x_۰,y_۰)$ یک نقطه تقاطع خم $(u(s),v(s))$ و یک منحنی از خانواده منحنی $x^۲+y^۲=c$ به ازای عدد مثبت و تثبیت شده c باشد. همچنین همانند راه حل اول فرض کنید خم $x^۲+y^۲=c$ به صورت $(x(t),y(t))$ پرمایش شده باشد. پس $t_۰, s_۰$ موجودند به قسمی که :

$$(x(t_۰),y(t_۰))=(x_۰,y_۰)$$

$$(u(s_۰),v(s_۰))=(x_۰,y_۰)$$

حال بردار های مماس بر دو منحنی را در نقطه $(x_۰,y_۰)$ بررسی می کنیم. همانند استدلال راه حل اول رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$(x_۰,y_۰).(x'(t_۰),y'(t_۰))=۰$$

اکنون شرط تعامد نتیجه می دهد که بردار های $(x'(t_۰),y'(t_۰))$ و $(u'(s_۰),v'(s_۰))$ بر یکدیگر عمودند و از آنجایی که دو بردار عمود بر یک بردار باید موازی باشند نتیجه می شود که به ازای عدد ثابتی مانند K داریم:

$$(u'(s_۰),v'(s_۰))=K(x_۰,y_۰)=K(u(s_۰),v(s_۰))$$

و با تغییرات پیوسته اعداد مثبت c که منجر به تغییرات پیوسته $s_۰$ می شود دستگاه معادلات زیر را بدست می آوریم:

$$u'(s)=Ku(s)$$

$$v'(s)=Kv(s)$$

که جواب های دستگاه بالا عبارتند از :

$$u(s)=C_۱e^{Ks}$$

$$v(s)=C_۲e^{Ks}$$

و اگر دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم بدست می آوریم $m = \frac{C_۲}{C_۱} = \frac{v(s)}{u(s)}$. پس $(u(s), v(s))$ یک پرمایش برای خط $y = mx$ می باشد و از آنجایی که $C_۱, C_۲$ می توانند آزادانه تغییر کنند دسته خط های $y = mx$ دسته خط های متعامد بر دسته منحنی های $x^۲ + y^۲ = c$ می باشد.

در این مثال خاص خانواده منحنی های $x^۲ + y^۲ = c$ دوایر به مرکز مبدا هستند و از اطلاعات هندسه مسطحه این را می دانیم که دسته منحنی های متعامد بر این دسته دوایر لزوما خطوط در راستای شعاعی می باشند و از آنجایی که مرکز همه این دوایر مبدا مختصات است نتیجه میگیریم که دسته منحنی های متعامد بر این دوایر خطوط گذرنده از مبدا می باشند.

$\boxed{\textbf{سوال ۹}}$ معادلات لورنتس: در سال ۱۹۶۳ میلادی ادوارد لورنتس در راستای مطالعه نظری هواشناسی به خصوص در راستای پیش بینی وضعیت آب و هوایی (که البته اساس آن مدل های انتقال حرارت می باشد) دستگاه زیر را معرفی نمود:

$$\begin{cases} x' = \sigma(-x + y) \\ \\ y' = rx - y - xz \\ \\ z' = -bx + xy \end{cases}$$

که در آن b, r, σ سه پارامتر هستند. در زمان معرفی این دستگاه پارامترهای b, r, σ عبارت بودند از:

$$b = \frac{۸}{۳}, r = ۲۸, \sigma = ۱۰$$

به منظور بررسی پایداری چنین دستگاهی مقادیر ویژه ماتریس زیر مورد مطالعه قرار می گیرد:

$$A = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & ۰ \\ r & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -b \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس A را بدست آورید.

$\boxed{\textbf{پاسخ}}$ یادآوری می کنیم که مقادیر ویژه ماتریس مربعی A اعداد λ ای هستند که در رابطه $\det(A - \lambda I) = ۰$ صدق میکنند.

ابتدا ماتریس $A - \lambda I$ را بدست می آوریم:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -\sigma - \lambda & \sigma & ۰ \\ r & -۱ - \lambda & ۰ \\ ۰ & ۰ & -b - \lambda \end{bmatrix}$$

حال برای بدست آوردن دترمینان ماتریس بالا طبیعی است که سطر سوم یا ستون سوم را در نظر بگیریم. اگر سطر سوم را در نظر بگیریم داریم:

$$\det(A - \lambda I) = (-۱)^{۳+۳}(-b - \lambda)[(-\sigma - \lambda)(-۱ - \lambda) - r\sigma]$$

و در نتیجه:

$$\det(A-\lambda I) = -(b+\lambda)[(\sigma+\lambda)(1+\lambda) - r\sigma]$$

حال باید معادله $det(A-\lambda I)=0$ را حل کنیم. واضح است که یک جواب آن عبارت است از $\lambda_1=-b$. جواب های دیگر از طریق معادله زیر حاصل می شوند:

$$(\sigma+\lambda)(1+\lambda) - r\sigma = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (1+\sigma)\lambda + \sigma - r\sigma = 0$$

و طبق فرمول حل معادلات درجه دوم مقادیر ویژه دیگر را بدست می آوریم:

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-1-\sigma \pm \sqrt{1+\sigma^2+2\sigma-4\sigma+4r\sigma}}{2}$$

پس داریم $\lambda_1=-b$ و :

$$\lambda_2, \lambda_3 = \frac{-1-\sigma \pm \sqrt{(\sigma-1)^2+4r\sigma}}{2}$$

سوال ۱۰ در صورت وجود داشتن وارون آن را حساب کنید:

- الف)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

پاسخ ابتدا دترمینان ماتریس A را محاسبه می کنیم:

$$\det(A) = 1(1\times 1 - 0\times(-2)) - (-1)(2\times 1 - 0\times 3) + (-1)(2\times(-2) - 1\times(3)) = 1+2+7 = 10 \neq 0$$

پس A وارون پذیر می باشد. یک راه برای محاسبه وارون ماتریس A آن است که دنباله ای از عملیات های سطری مقدماتی روی A را در نظر بگیریم که با اعمال آنها روی A به ماتریس همانی می رسیم و این اعمال را روی ماتریس همانی پیاده می کنیم و در انتها ماتریسی که حاصل می شود همان ماتریس وارون A میباشد. بدین منظور ابتدا این دو عمل را در نظر میگیریم که ابتدا منفی دو برابر سطر اول را به سطر دوم اضافه و حاصل را در سطر دوم می نویسیم و سپس منفی سه برابر سطر اول را به سطر سوم اضافه و حاصل را در سطر سوم می نویسیم.با اعمال این دو عمل بر A به ماتریس زیر می رسیم:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

با انجام همین اعمال بیان شده روی I به ماتریس $I_۲$ می رسیم:

$$I_۲ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

اکنون در ماتریس $A_۲$ سطر دوم را در $\frac{۱}{۳}$ ضرب نموده و حاصل را به سطر اول اضافه کرده و حاصل را در سطر اول می نویسیم. همچنین سطر دوم را در منفی $\frac{۱}{۳}$ ضرب کرده و حاصل را با سطر سوم جمع کرده و حاصل را در سطر سوم می نویسیم. با انجام این فرآیند به ماتریس $A_۴$ می رسیم:

$$A_۴ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -\frac{۱}{۳} \\ ۰ & ۳ & ۲ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۳} \end{bmatrix}$$

و با انجام همین اعمال روی $I_۲$ به ماتریس $I_۴$ می رسیم:

$$I_۴ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۱}{۳} & ۰ \\ -۲ & ۱ & ۰ \\ -\frac{۷}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

با ضرب کردن سطر سوم ماتریس $A_۴$ در $\frac{۱}{۱۰}$ و جمع با سطر اول و نوشتن حاصل در سطر اول و همچنین ضرب سطر سوم در منفی $\frac{۶}{۱۰}$ و جمع با سطر دوم و نوشتن حاصل در سطر دوم به ماتریس $A_۶$ می رسیم:

$$A_۶ = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & \frac{۱۰}{۳} \end{bmatrix}$$

و با انجام همین فرآیند روی $I_۴$ داریم:

$$I_۶ = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} & \frac{۳}{۱۰} & \frac{۱}{۱۰} \\ -\frac{۳}{۵} & \frac{۶}{۵} & -\frac{۳}{۵} \\ \frac{۷}{۳} & -\frac{۱}{۳} & ۱ \end{bmatrix}$$

حال در ماتریس $I_۶$ با ضرب سطر دوم در $\frac{۱}{۳}$ و سطر سوم در $\frac{۳}{۱۰}$ به وارون ماتریس A می رسیم:

$$A^{-۱} = \frac{۱}{۱۰} \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۱ \\ -۲ & ۴ & -۲ \\ -۷ & -۱ & ۳ \end{bmatrix}$$

• ب)

$$B = \begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ ابتدا دترمینان B را محاسبه می کنیم:

$$\det(B) = ۲(۲\times(-۱) - ۱\times(-۱)) - ۳(-۱\times(-۱) - ۱\times ۴) + ۱(-۱\times(-۱) - ۲\times ۴) = -۲ + ۹ - ۷ = ۰$$

پس B وارون پذیر نیست چرا که $det(B) = ۰$.

سوال ۱۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را برای ماتریس های زیر بدست آورید:

• الف)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ ابتدا ماتریس $A - \lambda I$ را بدست می آوریم:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} ۱ - \lambda & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ - \lambda & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ - \lambda \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$\det(A - \lambda I) = (۱ - \lambda)[(۱ - \lambda)^۲ + ۴]$$

اکنون مقادیر ویژه A آن λ هایی هستند که به ازای آنها $\det(A - \lambda I) = ۰$. مشاهده می شود که $\lambda = ۱$ تنها مقدار ویژه حقیقی ماتریس A می باشد. مقادیر ویژه مختلط ماتریس A عبارتند از $\lambda_۱, \lambda_۲ = ۱ \pm ۲i$.

حال بردارهای ویژه متناظر با هر کدام از مقادیر ویژه را بدست می آوریم. برای $\lambda = ۱$ باید بردارهای ستونی ناصفر X را بیابیم که در رابطه $AX = X$ صدق کنند. فرض کنید $x_۱, x_۲, x_۳$ درایه های بردار ستونی X باشند. پس:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن نظیر درایه ها به دستگاه زیر از معادلات می رسیم (درایه های اول در ماتریس های چپ و راست تساوی برابر با $x_۱$ می باشند که یک تساوی بدیهی است و لذا از نوشتن آن پرهیز می کنیم):

$$\begin{cases} ۲x_۱ + x_۲ - ۲x_۳ = x_۲ \\ ۳x_۱ + ۲x_۲ + x_۳ = x_۳ \end{cases}$$

و دستگاه بالا در واقع همین دستگاه زیر می باشد:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

اگر x_1 را پارامتر قرار دهیم بدست می آوریم $x_3 = x_1$ و $x_2 = -\frac{3}{2}x_1$. در نتیجه بردار های ستونی :

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{3}{2}t \\ t \end{bmatrix}$$

که در آن t می تواند آزادانه تغییر کند بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda = 1$ برای ماتریس A می باشند.

بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 1 + 2i$ آن بردارهای ستونی ناصفر Y هستند که $AY = (1 + 2i)Y$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = (1 + 2i) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن درایه های اول طرفین بدست می آوریم $y_1 = 0$. با تساوی قرار دادن درایه های دوم و سوم طرفین بدست می آوریم:

$$\begin{cases} y_2 - 2y_3 = (1 + 2i)y_2 \\ 2y_2 + y_3 = (1 + 2i)y_3 \end{cases}$$

که اگر دستگاه فوق را ساده کنیم به دستگاه زیر می رسیم:

$$\begin{cases} y_3 = -iy_2 \\ y_2 = iy_3 \end{cases}$$

توجه داریم که معادلات فوق در واقع یک معادله بیشتر نیستند. اگر y_3 را پارامتر قرار دهیم بدست می آوریم $y_2 = iy_3$ و در نتیجه خانواده بردار های ستونی:

$$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ it \\ t \end{bmatrix}$$

که در آن t می تواند آزادانه تغییر کند بردارهای ویژه ماتریس A متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 1 + 2i$ می باشند.

از آنجایی که A ماتریسی با درایه های حقیقی می باشد و λ_2 مزدوج مختلط λ_1 می باشد اگر از طرفین رابطه

$AY = \lambda_۱ Y$ مزدوج بگیریم (یعنی درایه های ماتریس های چپ و راست را مزدوج گیری کنیم) بدست می آوریم $A\bar{Y} = \lambda_۲ \bar{Y}$. پس بردارهای ویژه ماتریس A متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۱ - ۲i$ دقیقا آن بردارهای ستونی ای هستند که بر اثر مزدوج گیری از درایه های بردار های ستونی ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۱ + ۲i$ حاصل می گردند. از آنجایی که بردارهای ویژه A متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۱ + ۲i$ را می شناسیم پس بردار های ویژه A متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۱ - ۲i$ را نیز می شناسیم.

- ب)

$$B = \begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$$

پاسخ ماتریس $B - \lambda I$ را بدست می آوریم:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} ۵ - \lambda & -۱ \\ ۳ & ۱ - \lambda \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$\det(B - \lambda I) = (۵ - \lambda)(۱ - \lambda) + ۳ = \lambda^۲ - ۶\lambda + ۸ = (\lambda - ۴)(\lambda - ۲)$$

پس مقادیر ویژه A عبارتند از $\lambda_۱ = ۴$ و $\lambda_۲ = ۲$.

بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_۱ = ۴$ را بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix} = ۴ \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن نظیر به نظیر درایه های طرفین دستگاه زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{cases} x_۱ - x_۲ = ۰ \\ x_۱ - x_۲ = ۰ \end{cases}$$

پس خانواده بردار های ستونی:

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

بردار های ویژه ماتریس B متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۴$ می باشند.

برای مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۲$ نیز مشابه همین فرآیند بالا را اجرا می کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix} = ۲ \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \end{bmatrix}$$

و در نهایت به دستگاه معادلات زیر می رسیم:

$$\begin{cases} ۳y_۱ - y_۲ = ۰ \\ ۳y_۱ - y_۲ = ۰ \end{cases}$$

پس خانواده بردار های ستونی:

$$Y = \begin{bmatrix} t \\ ۳t \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه ماتریس B متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = ۲$ می باشند.

- ج)

$$C = \begin{bmatrix} ۷ & ۰ & -۳ \\ -۹ & -۲ & ۳ \\ ۱۸ & ۰ & -۸ \end{bmatrix}$$

$\boxed{\textbf{پاسخ}}$ ماتریس $C - \lambda I$ را بدست می آوریم:

$$C - \lambda I = \begin{bmatrix} ۷-\lambda & ۰ & -۳ \\ -۹ & -۲-\lambda & ۳ \\ ۱۸ & ۰ & -۸-\lambda \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$\det(C-\lambda I) = (۷-\lambda)(\lambda+۲)(\lambda+۸)-۳(۱۸)(\lambda+۲) = (\lambda+۲)[-(\lambda-۷)(\lambda+۸)-۵۴] = -(\lambda+۲)^۲(\lambda-۱)$$

پس $\lambda_۱ = ۱$ و $\lambda_۲ = -۲$ مقادیر ویژه ماتریس C هستند.

بردارهای ویژه متناظر با $\lambda_۱ = ۱$ را محاسبه می کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & -۳ \\ -۹ & -۲ & ۳ \\ ۱۸ & ۰ & -۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

تساوی قرار دادن نظیر به نظیر درایه های طرفین منجر به دستگاه معادلات زیر می شود:

$$\begin{cases} ۲x_۱ - x_۳ = ۰ \\ -۹x_۱ - ۳x_۲ + ۳x_۳ = ۰ \\ ۲x_۱ - x_۳ = ۰ \end{cases}$$

اگر $x_۱$ را به عنوان پارامتر در نظر بگیریم بدست می آوریم $x_۳ = ۲x_۱$ و $x_۲ = -x_۱$. پس خانواده بردارهای ستونی:

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ ۲t \end{bmatrix}$$

بردارهای ویژه ماتریس C متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۱$ می باشند.

بطور مشابه برای مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۲$ داریم:

$$\begin{bmatrix} ۷ & ۰ & -۳ \\ -۹ & -۲ & ۳ \\ ۱۸ & ۰ & -۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = -۲ \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}$$

و با تساوی قرار دادن نظیر به نظیر درایه های طرفین به دستگاه معادلات خطی زیر می رسیم:

$$\begin{cases} ۳y_۱ - y_۳ = ۰ \\ ۳y_۱ - y_۳ = ۰ \\ ۳y_۱ - y_۳ = ۰ \end{cases}$$

و در نتیجه خانواده بردار های ستونی :

$$Y = \begin{bmatrix} t \\ s \\ ۳t \end{bmatrix}$$

که در آن t, s دو پارامتر هستند که آزادانه و مستقل از یکدیگر تغییر می کنند بردارهای ویژه ماتریس C متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۲$ می باشند.

- د)

$$D = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix}$$

پاسخ ماتریس $D - \lambda I$ را بدست می آوریم:

$$D - \lambda I = \begin{bmatrix} -\lambda & ۱ & ۱ \\ ۱ & -\lambda & ۱ \\ ۱ & ۱ & -\lambda \end{bmatrix}$$

حال داریم:

$$\det(D - \lambda I) = -\lambda(\lambda^۲ - ۱) - (-\lambda - ۱) + (\lambda + ۱) = -\lambda(\lambda^۲ - ۱) + ۲(\lambda + ۱) = -(\lambda + ۱)^۲(\lambda - ۲)$$

پس مقادیر ویژه ماتریس D عبارتند از $\lambda_۱ = ۲$ و $\lambda_۲ = -۱$.

ابتدا بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۱$ را بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \\ x_۳ \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن نظیر به نظیر درایه های طرفین به دستگاه معادلات زیر می رسیم:

$$\begin{cases} x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \\ x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۰ \end{cases}$$

پس نتیجه می شود که خانواده بردارهای ستونی:

$$X = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix}$$

که در آن t, s دو پارامتر هستند که بصورت آزادانه و مستقل از هم تغییر می کنند بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۲ = -۱$ برای ماتریس D هستند.

حال بردار های ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_۱ = ۲$ را بدست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix} = ۲ \begin{bmatrix} y_۱ \\ y_۲ \\ y_۳ \end{bmatrix}$$

با تساوی قرار دادن نظیر به نظیر درایه های طرفین داریم:

$$\begin{cases} -۲y_۱ + y_۲ + y_۳ = ۰ \\ y_۱ - ۲y_۲ + y_۳ = ۰ \\ y_۱ + y_۲ - ۲y_۳ = ۰ \end{cases}$$

طرفین معادله دوم را در ۲ ضرب کنید بدست می آوریم $۲y_۱ - ۴y_۲ + ۲y_۳ = ۰$ و از معادله سوم نیز داریم $۲y_۳ = y_۱ + y_۲$ و با جایگذاری این رابطه اخیر در رابطه قبلی بدست می آوریم:

$$۲y_۱ - ۴y_۲ + y_۱ + y_۲ = ۰ \Rightarrow y_۱ = y_۲$$

و با جایگذاری این رابطه در معادله اول بدست می آوریم $y_1 = y_2 = y_3$. پس خانواده بردارهای ستونی:

$$Y = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

که در آن t میتواند آزادانه تغییر کند بردارهای ویژه متناظر با مقدار ویژه $\lambda_1 = 2$ برای ماتریس D می باشند.

سوال ۱۲ اگر $\lambda = 0$ یک مقدا ویژه ماتریس A باشد نشان دهید ماتریس A وارون ناپذیر است.

پاسخ اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A باشد آنگاه رابطه $\det(A - \lambda I) = 0$ برقرار است و حال که $\lambda = 0$ یک مقدار ویژه ماتریس A است باید داشته باشیم $\det(A - 0I) = 0$ و در نتیجه $\det(A) = 0$ و در نتیجه ماتریس A باید وارون ناپذیر باشد.

سوال ۱۳ در هر کدام از دسته بردار های داده شده مشخص کنید که آیا مستقل خطی هستند یا نه؟ در صورت مستقل نبودن یک رابطه خطی نا بدیهی بین آنها پیدا کنید.

- الف)

$$x^1 = (1, 1, 0), x^2 = (0, 1, 1), x^3 = (1, 0, 1)$$

پاسخ فرض کنید بین $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ یک رابطه خطی بصورت زیر برقرار باشد:

$$c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + c_3x^{(3)} = (0, 0, 0)$$

با تساوی قرار دادن نظیر به نظیر مولفه ها به دستگاه معادلات زیر می رسیم:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

از معادله دوم بدست می آوریم $c_2 = -c_1$ حاصل را در معادله سوم جایگذاری می کنیم و بدست می آوریم $c_3 = c_1$ و این حاصل را نیز در معادله اول جایگذاری می کنیم و بدست می آوریم $2c_1 = 0$ و در نتیجه $c_1 = 0$ و با جایگذاری در معادله دوم بدست می آوریم $c_2 = 0$ و با جایگذاری در معادله سوم نیز بدست می آوریم $c_3 = 0$ و در نتیجه $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ و در نتیجه $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ مستقل خطی می باشند.

• ب)

$$x^{(1)} = (2, 1, 0), x^{(2)} = (0, 1, 0), x^{(3)} = (-1, 2, 0)$$

پاسخ هر سه بردار دارای این ویژگی هستند که مولفه سوم آنها برابر با صفر می باشند. پس با نادیده گرفتن مولفه سوم این بردار ها میتوان به $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ به دید بردار هایی در $\mathbb{R}^2$ نگاه کرد که بنا بر مسئله ۱۷ باید وابسته خطی باشند. در واقع یک رابطه خطی غیر بدیهی بین $x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}$ بدین صورت است:

$$x^{(1)} - 5x^{(2)} + 2x^{(3)} = 0$$

• ج)

$$x^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}), x^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t}), x^{(3)}(t) = (3e^{-t}, 0), -\infty < t < \infty$$

پاسخ این سه بردار داده شده نیز وابسته خطی هستند. یک رابطه خطی غیر بدیهی بین $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t), x^{(3)}(t)$ عبارت است از:

$$x^{(1)}(t) - 2x^{(2)}(t) + \frac{1}{3}x^{(3)}(t) = 0$$

• د)

$$x^{(1)}(t) = (2\sin t, \sin t), x^{(2)}(t) = (\sin t, 2\sin t), -\infty < t < \infty$$

پاسخ فرض کنید یک رابطه خطی بین $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$ بصورت زیر باشد:

$$c_1x^{(1)}(t) + c_2x^{(2)}(t) = (0, 0)$$

در اینجا تساوی بدان معنا است که به ازای تمامی مقادیر t تساوی بالا برقرار است. با جایگذاری $t = \frac{\pi}{2}$ داریم:

$$c_1x^{(1)}(\frac{\pi}{2}) + c_2x^{(2)}(\frac{\pi}{2}) = 0 \Rightarrow c_1(2, 1) + c_2(1, 2) = (0, 0)$$

و در نتیجه دستگاه زیر حاصل می شود:

$$\begin{cases} 2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 0 \end{cases}$$

اما از آنجایی که ماتریس ضرایب دستگاه فوق دارای دترمینان ناصفر است نتیجه میگیریم که ماتریس ضرایب این دستگاه وارون پذیر بوده و در نتیجه تنها جواب دستگاه فوق برابر با $c_1 = c_2 = 0$ است. در نتیجه دو بردار $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$ مستقل خطی می باشند.

سوال ۱۴ اگر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد نشان دهید:

$$(Ax, y) = (x, A^*y)$$

پاسخ یادآوری می کنیم که ضرب داخلی دو بردار ستونی u, v با درایه های مختلط با رابطه $(u, v) = u^*v$ تعریف می شود که در آن عمل $*$ عمل ترانهاده گیری و سپس مزدوج گیری از درایه های ماتریس مورد نظر می باشد. اکنون داریم:

$$(Ax, y) = (Ax)^*y = x^*A^*y = x^*(A^*y) = (x, A^*y)$$

توجه کنید که در نوشتن تساوی های اخیر از رابطه $(AB)^* = B^*A^*$ که برای هر دو ماتریس A, B با درایه های مختلط معتبر است (البته باید ضرب A, B تعریف شدنی باشد) استفاده گردید

سوال ۱۵ نشان دهید مقادیر ویژه ماتریس های هرمیتی حقیقی هستند.

پاسخ ابتدا یادآوری می کنیم که ماتریس مربعی A با درایه های مختلط را هرمیتی می نامیم هر گاه $A = A^*$ که منظور از A^* ماتریسی است که با گرفتن ترانهاده از ماتریس A و سپس مزدوج گیری از درایه های A حاصل می شود (البته ترتیب اعمال تاثیری در جواب نهایی ندارد. میتوانید ابتدا درایه های A را مزدوج گرفته و سپس ترانهاده گیری را اعمال کنید).
فرض کنید $\lambda \in \mathbb{C}$ یک مقدار ویژه ماتریس هرمیتی A باشد. پس ماتریس ستونی ناصفر با درایه های مختلط مانند X وجود دارد به قسمی که:

$$AX = \lambda X$$

یادآوری میکنیم که عمل $*$ یعنی همان عمل روی ماتریس ها که درایه ها را مزدوج و سپس از ماتریس ترانهاده می گیرد در رابطه $(AB)^* = B^*A^*$ صدق می کند. با این یادآوری عمل $*$ را بر رابطه بالا اعمال می کنیم. بدست می آوریم:

$$X^*A^* = \bar{\lambda}X^* \Rightarrow X^*A = \bar{\lambda}X^*$$

اکنون طرفین تساوی بالا را از راست در X ضرب کرده و بدست می آوریم:

$$X^*AX = \bar{\lambda}X^*X \Rightarrow X^*(\lambda X) = \bar{\lambda}X^*X$$

و در نتیجه:

$$(\lambda - \bar{\lambda})X^*X = ۰$$

اما X^*X بیانگر نرم ماتریس با درایه های مختلط X می باشد. به عبارت دقیق تر اگر درایه های ماتریس ستونی X را به ترتیب $x_۱, ..., x_n$ بنامیم آنگاه خواهیم داشت:

$$X^*X = |x_۱|^۲ + |x_۲|^۲ + ... + |x_n|^۲$$

حال از آنجایی که X ناصفر است نتیجه می شود که X^*X نیز ناصفر است و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\lambda - \bar{\lambda} = ۰ \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

و این نتیجه می دهد که λ باید عددی حقیقی باشد.

سوال ۱۶ نشان دهید بردار داده شده:

$$x(t) = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} e^t + ۲ \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix} te^t$$

در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$x^{'} = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} e^t$$

پاسخ بدین منظور کافیست $x(t)$ را در طرفین جایگذاری کرده و بررسی کنیم که آیا دو طرف برابر می شوند یا خیر. ابتدا $x(t)$ را بازنویسی می کنیم:

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^t + ۲te^t \\ ۲te^t \end{bmatrix}$$

برای مشتق گیری از $x(t)$ کافیست درایه به درایه مشتق گیری را انجام دهیم و حاصل را در همان درایه خود قرار دهیم.

پس داریم:

$$x^{'}(t) = \begin{bmatrix} e^t + ۲e^t + ۲te^t \\ ۲e^t + ۲te^t \end{bmatrix}$$

و در نتیجه:

$$x^{'}(t) = \begin{bmatrix} ۳e^t + ۲te^t \\ ۲e^t + ۲te^t \end{bmatrix}$$

اکنون $x(t)$ را در طرف راست معادله جایگذاری می کنیم:

$$\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t + ۲te^t \\ ۲te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix} e^t = \begin{bmatrix} ۲e^t + ۴te^t - ۲te^t \\ ۳e^t + ۶te^t - ۴te^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t \end{bmatrix}$$

و با یک جمع زدن ساده میبینیم که حاصل برابر می شود با:

$$\begin{bmatrix} ۳e^t + ۲te^t \\ ۲e^t + ۲te^t \end{bmatrix}$$

پس طرف چپ و طرف راست تساوی یکسان هستند و در نتیجه $x(t)$ یک جواب معادله مذکور می باشد.

سوال ۱۷ اگر $x^{(۱)}, x^{(۲)}, ..., x^{(m)}$ بردار هایی عضو $\mathbb{R}^n$ باشند و $n < m$ نشان دهید این بردارها وابسته خطی می باشند.

پاسخ اگر با اطلاعات ریاضی عمومی ۲ بخواهیم به سوال جواب دهیم راه حل ساده است. چرا که بعد $\mathbb{R}^n$ برابر با n است و در نتیجه هر زیر مجموعه از $\mathbb{R}^n$ که بیشتر از n عضو داشته باشد لزوما وابسته خطی می باشد.

اما با اطلاعات مقدماتی چگونه می توان این سوال را بررسی نمود؟ برای اثبات وابسته خطی بودن بردار های $x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ باید اعداد حقیقی $c_1, ..., c_m$ که همگی با هم صفر نیستند را به قسمی یافت که:

$$c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + ... + c_mx^{(m)} = 0$$

اگر قرار دهیم $x^{(i)} = (x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni})$ رابطه بالا منجر به حل یک دستگاه معادلات خطی با m مجهول و n معادله می گردد:

$$\begin{cases} x_{11}c_1 + x_{12}c_2 + ... + x_{1m}c_m = 0 \\ x_{21}c_1 + x_{22}c_2 + ... + x_{2m}c_m = 0 \\ . \\ . \\ x_{n1}c_1 + x_{n2}c_2 + ... + x_{nm}c_m = 0 \end{cases}$$

دستگاه های همگنی که تعداد مجهولات آنها بیشتر از تعداد معادلات آنها است همواره دارای جواب ناصفر می باشند. به عبارت دقیق تر برای حل دستگاه بالا می توان ابتدا ماتریس ضرایب دستگاه بالا را به فرم تحویل شده سطری پلکانی تبدیل نمود و از آنجایی که جواب های این دستگاه دقیقا جواب های دستگاه ناشی از دستگاه معادلات خطی ای است که ماتریس ضرایب آن همان ماتریس تحویل شده سطری پلکانی ماتریس ضرایب دستگاه معادلات بالا می باشد می توان جواب های $c_1, c_2, ..., c_m$ برای دستگاه معادلات بالا بدست آورد که همگی با هم ناصفر نیستند. در نتیجه $x^{(1)}, ..., x^{(m)}$ وابسته خطی می باشند.