



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا
معادلات دیفرانسیل

تمرینات هفتگی سری پنجم

۱. شعاع همگرایی را در هر کدام از سری های زیر به دست آورید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} \quad \text{(الف)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n \quad \text{(ب)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - x_0)^n}{n} \quad \text{(ج)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n!}{n^n} \quad \text{(د)}$$

۲. بسط تیلور توابع زیر را حول x به دست آورده و شعاع همگرایی را به دست آورید.

$$\text{Ln}(1+x) \quad x_0 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\frac{1}{1-x} \quad x_0 = 2 \quad \text{(ب)}$$

۳. با استفاده از سری توانی جواب هر کدام از معادلات زیر را حول x به دست آورید (با به دست آوردن y_1 و y_2 این کار را انجام دهید). سپس با استفاده از رونسکین y_1 و y_2 ، مستقل بودن دو جواب را بررسی کنید.

$$y'' - y = 0 \quad x_0 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$y'' + k^2 x^2 y = 0 \quad x_0 = 0 \quad \text{(ب)} \quad k \text{ ثابت}$$

$$(2 + x^2)y'' - xy' + 4y = 0 \quad x_0 = 0 \quad \text{(پ)}$$

$$y'' + xy' + 2y = 0 \quad x_0 = 0 \quad \text{(ج)}$$

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad x_0 = 1 \quad \text{(د)}$$

۴. با استفاده از سری ها جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0 \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 2 \quad \text{(الف)}$$

۵. در هر کدام از مسایل زیر شعاع همگرایی سری وابسته به جواب حول x را به دست آورید.

$$\text{الف) } y'' + 4y' + 6xy = 0 \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$$

$$\text{ب) } (1 + x^2)y'' + 4xy' + y = 0 \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$$

۶. برای معادله دیفرانسیل $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$ که α ثابت است، دو جواب مستقل خطی بیابید. سپس نشان دهید اگر α عدد صحیح n باشد، آنگاه این معادله دیفرانسیل دارای جوابی به صورت یک چندجمله ای از درجه n خواهد بود.

۷. در مسایل زیر نشان دهید مبدا یک نقطه منفرد منظم است. سپس در حول این نقطه جواب عمومی را با استفاده از روش سری ها به دست آورید.

$$\text{الف) } 3x^2y'' - xy' + y = 0$$

$$\text{ب) } 2x^2y'' + 7x(x + 1)y' - 3y = 0$$

$$\text{ج) } x^2y'' + (x^2 - 2x)y' + 2y = 0$$

$$\text{د) } x^2y'' + (x^2 + 2x)xy' - 2xy = 0$$