



دانشکده علوم ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف

به نام خدا

معادلات دیفرانسیل

سری چهارم

۱. جواب معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

(الف)

$$y' + \left(\frac{2}{t}\right)y = \frac{\cos t}{t^2}, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$$

(ب)

$$y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$$

(ج)

$$ty' + (t+1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$$

(د)

$$y' = \frac{e^{-x} - e^x}{3 + 4y}, \quad y(0) = 1$$

(و)

$$y' = xy^2(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad y(0) = 1$$

(ه)

$$y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} dy = \arcsin x dx, \quad y(0) = 1$$

۲. فاکتور انتگرال را پیدا کرده و معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف)

$$1 + \left(\frac{x}{y} - \sin y\right)y' = 0$$

(ب)

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

(ج)

$$\left(2x + \frac{6}{y}\right) + \left(\frac{x^2}{y} + 2\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

۳. مقدار y را طوری پیدا کنید که جواب معادله زیر

$$y' - y = 2 \sin t + 1 \quad y(0) = y_0,$$

وقتی که $t \rightarrow \infty$ کراندار باقی بماند.

۴. نشان دهید اگر a و λ دو عدد مثبت و b عدد حقیقی دلخواه باشد، آنگاه هر جواب معادله $y' + ay = be^{-\lambda t}$ دارای این خاصیت که وقتی $t \rightarrow \infty$ خواهیم داشت $y \rightarrow 0$.

۵. با استفاده از روش تغییر پارامتر معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

(الف)

$$ty' + \Upsilon y = \sin t, \quad t > 0$$

(ب)

$$\Upsilon y' + y = \Upsilon t^\Upsilon$$

(ج)

$$y' + \left(\frac{1}{t}\right)y = \Upsilon \cos \Upsilon t, \quad t > 0$$

۶. نقاطی از صفحه ty را پیدا کنید که معادله در بازه ای از آن نقاط دارای جواب است.

(الف)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1 + t^\Upsilon}{\Upsilon y - y^\Upsilon}$$

(ب)

$$y' = \frac{\ln |ty|}{1 - t^\Upsilon + y^\Upsilon}$$

۷. معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$(ax + by)dx + (cx + dy)dy = 0$$

شرط لازم را طوری پیدا کنید که معادله بالا کامل باشد. سپس جواب عمومی را به دست آورید.

۸. (معادله ریکاتی) معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y' + y^\Upsilon p_1(x) + yp_2(x) + p_3(x) = 0, \quad p_1(x) \neq 0$$

(الف) فرض کنید $y_1(x)$ یک جواب معادله باشد. آنگاه ثابت کنید جواب عمومی به فرم $y(x) = y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ است. بطوریکه z جواب معادله دیفرانسیل زیر است:

$$z' - z(\Upsilon y_1(x)p_1(x) + p_2(x)) = p_3(x)$$

(ب) یک جواب معادله زیر را حدس زده و با استفاده از قسمت الف، جواب عمومی معادله را به دست آورید.

$$y' = x^\Upsilon + \frac{\Upsilon}{x}y - \frac{1}{x}y^\Upsilon$$

۹. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$y dx + x(1 - \Upsilon x^\Upsilon y^\Upsilon)dy = 0$$

(الف) نشان دهید این معادله کامل نیست.

(ب) اگر $\mu(x, y) = x^\alpha y^\beta$ یک عامل انتگرال‌ساز برای معادله باشد، مقدار α و β را به دست آورید.

(ج) با استفاده از قسمت ب جواب عمومی معادله را به دست آورید.

۱۰. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید و رفتار جواب را نسبت به a بررسی کنید.

(الف)

$$ty' + (t + 1)y = \Upsilon te^{-t}, \quad y(1) = a, \quad t > 0$$

(ب)

$$\sin t y' + \cos t y = e^t, \quad y(1) = a, \quad 0 < t < \pi$$

۱۱. معادلات دیفرانسیل زیر را حل کرده و بازه ای که جواب در آن تعریف شده است را مشخص کنید.

(الف)

$$y' = \frac{1 + 3x^2}{3y^2 - 6y}, \quad y(0) = 1$$

(ب)

$$y' = \frac{3x^2}{3y^2 - 4}, \quad y(1) = 0$$

۱۲. بدون حل کردن مسئله، بازه ای که جواب در آن موجود است را مشخص کنید.

(الف)

$$y' + \tan t y = \sin t, \quad y(\pi) = 0$$

(ب)

$$\ln t y' + y = \cot t, \quad y(2) = 2$$

۱۳. شرط لازم و کافی برای آنکه معادله زیر کامل باشد را بیابید.

$$(Ax^2 + Bxy + Cy^2)dx + (Dx^2 + Exy + Fy^2)dy = 0$$

۱۴. مسئله با مقدار اولیه زیر را حل کرده و در مورد پیوستگی جواب و مشتق بحث کنید.

$$y' + 2y = g(t), \quad y(0) = 0$$

بطوریکه

$$g(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & t > 1. \end{cases}$$

۱۵. معادلات دیفرانسیل زیر را با تغییر متغیرهای داده شده حل کنید.

(الف)

$$xy^2(xy' + y) = 4, \quad xy = t$$

(ب)

$$(xy + 2xy \ln^2 y + y \ln y)dx + (3x^2 \ln y + x)dy = 0, \quad x \ln y = t$$

۱۶. معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

ثابت کنید که اگر تابع f ای موجود باشد که در رابطه زیر صدق کند،

$$\frac{1}{yQ - xP} \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = f(xy)$$

در این صورت معادله دیفرانسیل فوق دارای فاکتور انتگرال به فرم زیر است:

$$F(z) = e^{\int f(z)dz}, \quad z = xy.$$