



۱.

الف) برای هر کدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر صفحه فاز بکشید و چند مدار آن را رسم کنید.

ب) جواب عمومی این دستگاه را به دست آورید.

ج) رفتار جواب وقتی که $t \rightarrow \infty$ را توصیف کنید.

(۱)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} x,$$

(۲)

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} x,$$

(۳)

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x,$$

(۴)

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x,$$

(۵)

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} \\ \frac{9}{5} & -1 \end{pmatrix} x,$$

(۶)

$$x' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} x,$$

(۷)

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & \frac{5}{4} \\ -\frac{9}{4} & 2 \end{pmatrix} x.$$

۲. جواب های عمومی هر کدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

(۱)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} x,$$

(۲)

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

(۳)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} x,$$

(۴)

$$x' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} x,$$

(۵)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -8 & -5 & -3 \end{pmatrix} x,$$

(۶)

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 2+i \\ -1 & -1-i \end{pmatrix} x.$$

۳. جواب های خصوصی هر کدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر را به دست آورید.

(۱)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} x, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(۲)

$$x' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} x, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

(۳)

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} x, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

۴. در هر کدام از دستگاه های معادلات دیفرانسیل زیر:

(الف) ماتریس اساسی جواب را پیدا کنید.

(ب) همچنین ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در شرط $\Phi(0) = I$ صدق می کند را نیز بیابید.

(۱)

$$x' = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} x,$$

(۲)

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x,$$

(۳)

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} x.$$

۵. دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را با استفاده از ماتریس اساسی $\Phi(t)$ که در تمرین قبل ذکر شد، حل کنید.

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

۶. دستگاه معادلات زیر جریان و ولتاژ را در یک مدار الکتریکی توصیف می کند.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix},$$

با فرض ثابت بودن پارامترهای مدار به سوالات زیر پاسخ دهید:

الف) شرایطی را روی L, C, R_1 و R_2 پیدا کنید که مقادیر ویژه ماتریس بالا حقیقی و متمایز باشند.

ب) نشان دهید اگر شرایط قسمت الف برقرار باشد، مقادیر ویژه هر دو منفی هستند. سپس نشان دهید $I(t), V(t) \rightarrow 0$ وقتی که $t \rightarrow \infty$ (با هر شرایط اولیه)

ج) اگر شرایط قسمت الف برقرار نباشد، آیا باز هم $I(t)$ و $V(t)$ در بی نهایت به سمت صفر میل می کنند؟

۷. نشان دهید تمام جواب های دستگاه زیر وقتی که $t \rightarrow \infty$ به سمت صفر میل می کنند اگر و تنها اگر $ad - bc > 0$ و $a + d < 0$.

$$x' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} x.$$

۸. فرض کنید $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ ، بطوریکه λ یک عدد حقیقی دلخواه است.

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix} \text{ الف) نشان دهید}$$

ب) $\exp(Jt)$ را به دست آورید.

ج) به کمک قسمت قبل دستگاه معادله دیفرانسیل زیر را حل کنید.

$$x' = Jx, \quad x(0) = x_0.$$

۹. فرض کنید حرکت یک نوسانگر را به صورت زیر مدل کرده ایم:

$$u'' + \omega^2 u = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0.$$

الف) فرض کنید $x_1 = u$ و $x_2 = u'$ ، معادله بالا را به صورت دستگاه زیر بنویسید:

$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0.$$

ب) نشان دهید $\exp(At) = I \cos(\omega t) + A \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$.

ج) جواب دستگاه معادله دیفرانسیل قسمت الف را به دست آورید.

۱۰. دستگاه $x' = Ax$ با شرط اولیه $x(\cdot) = x_0$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\Phi(t)$ جواب اساسی دستگاه فوق باشد، بطوریکه $\Phi(0) = I$ و $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

الف) نشان دهید $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t)$ و $\Phi(t) \times \Phi(s) = \Phi(t+s)$.

ب) با استفاده از قسمت الف نشان دهید $\exp(At) \times \exp(A(-t)) = I$ و $\exp(At) \times \exp(As) = \exp(A(t+s))$.