به نام خدا

سری اول کلاس حل تمرین

معادلات دیفرانسیل

دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

۱. یک میله فلزی با دمای $100^\circ F$ در اتاقی با دمای ثابت $0^\circ F$ قرار داده می شود. معادله دیفرانسیل مربوط به دمای میله فلزی را در صورتی که تغییرات دما متناسب با اختلاف دمای میله و محیط باشد، به دست آورید. سعی کنید جواب کلی معادله دیفرانسیل را حدس بزنید.

اگر بعد از ۲۰ دقیقه دمای میله به $50^\circ F$ برسد، لحظه ای را پیدا کنید که دمای میله به $25^\circ F$ کاهش می یابد.

۲. شکار و شکارچی: دستگاه معادلات دیفرانسیل که بیانگر جمعیت شکار و شکارچی در حضور هم هستند را با فرضیات زیر به دست آورید:

الف) نرخ رشد شکار در غیاب شکارچی متناسب با جمعیت شکار در آن لحظه می باشد.

ب) نرخ مرگ و میر شکارچی در غیاب شکار متناسب با جمعیت شکارچی در آن لحظه می باشد.

ج) نرخ تغییر جمعیت شکار و شکارچی در حضور هم متناسب با ضرب جمعیت شکار و شکارچی در آن لحظه می باشد.

۳. قانون ارشمیدس: به جسم شناور در مایع نیرویی برابر با وزن حجمی از مایع وارد می شود که جسم در آن اشغال کرده است. می خواهیم معادله حرکت جسمی را که در آب غوطه ور است به کمک قانون دوم نیوتن $F = ma$ به دست آوریم. (نیروی وارد شده به جسم برآیند نیروی وزن جسم و نیروی وارد شده از مایع به آن است.)

۴. در یک دستگاه مهندسی و کاربردی، کاملا طبیعی است که فرض کنیم دستگاه نه تنها متأثر از حالت های کنونی است، بلکه وابسته به حالت های پیشینی نیز هست. این وابستگی به گذشته، به شکل تأخیر در مدل آن دستگاه ظاهر می شود. برای مثال، یکی از کاستی های مدل های $\frac{du}{dt} = f(u)$ این است که آهنگ تولد در این گونه مدل ها به صورت آنی است؛ در حالی که باید زمانی برای رسیدن به بلوغ، زمانی برای دورهٔ بارداری و... در مدل رشد جمعیت منظور شود. مدلی را به صورت معادله دیفرانسیل برای این حالت بنویسید.

۵. ۵۰۰ موش در آزمایشگاه در یک محیط نگهداری می شوند که ۵ تای آن ها دارای بیماری واگیردار هستند. اگر نرخ رشد بیماری متناسب با تعداد جمعیت موش های بیمار در آن لحظه ضربدر موش های سالم در همان لحظه باشد، معادله دیفرانسیل مربوط به این مدل را بنویسید. با فرضیات بالا اگر با وجود واکسیناسیون نرخ رشد بیماری با معکوس تعداد موش های بیمار هم متناسب باشد، مدل جدید را به دست آورید.

۶. یک مخزن با ظرفیت ۵۰ گالن، با مقدار اولیه ۱۰ گالن از آب خالص را در نظر بگیرید. در لحظه $t = 0$ آب شوری شامل ۱ پوند نمک در هر گالن، با دبی۴ گالن بر دقیقه به مخزن در حال اضافه شدن است. در همین حال شیر خروجی، مخلوط را با دبی۲ گالن بر دقیقه خارج می کند.

الف) در چه لحظه ای مخزن پر می شود؟

ب) معادله دیفرانسیلی برای به دست آوردن مقدار نمک در مخزن در لحظه t را به دست آورید.

۷. شخصی به بانکی رفته و حساب جدیدی با ۱۰۰۰ دلار ایجاد میکند.بعد از ۷ سال با فرضیات زیر پول او چقدر خواهد شد ؟ در سه سال اول نرخ سود برابر با ۵.۸ و در چهار سال باقیمانده برابر با ۲۵.۹ درصد می باشد. معادل دیفرانسیلی برای مدل بالا به دست آورید.

۸. دسته منحنی $g(x,y)=c$ (c ثابت) را در نظر بگیرید (به ازای c های مختلف). مسیرهای متعامد این دسته منحنی، دسته منحنی هایی به صورت $f(x,y)=c$ هستند که منحنی های دسته اول را با زوایای قائم قطع می کنند. ثابت کنید دسته منحنی قائم منحنی های $x^۲+y^۲=c$ برابر است با $y=mx$.

۹. معادلات لورنتس: در سال ۱۹۶۳ میلادی ادوارد لورنتس در راستای مطالعه نظری هواشناسی به خصوص در راستای پیش بینی وضعیت آب و هوایی (که البته اساس آن مدل های انتقال حرارت می باشد) دستگاه زیر را معرفی نمود:

$$\begin{cases} \dot{x}=\sigma(-x+y), \\ \dot{y}=rx-y-xz, \\ \dot{z}=-bx+xy. \end{cases}$$

که در آن، σ، r و b سه پارامتر هستند. در زمان معرفی این دستگاه پارامترهای σ، r و b عبارت بودند از:

$$b=\frac{۸}{۳}, r=۲۸, \sigma=۱۰.$$

به منظور بررسی پایداری چنین دستگاهی، مقادیر ویژه ماتریس زیر مورد مطالعه قرار می گیرند:

$$A=\begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & ۰ \\ r & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -b \end{pmatrix},$$

مقادیر ویژه ماتریس A را به دست آورید.

۱۰. در صورت وجود داشتن وارون، آن را حساب کنید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & -۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۳ & -۲ & ۱ \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ -۱ & ۲ & ۱ \\ ۴ & -۱ & -۱ \end{pmatrix}.$$

۱۱. مقادیر ویژه و بردارهای ویژه متناظر با این مقادیر ویژه را برای ماتریس های زیر به دست آورید.

$$A=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} ۵ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} ۷ & ۰ & -۳ \\ -۹ & -۲ & ۳ \\ ۱۸ & ۰ & -۸ \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}.$$

۱۲. اگر $\lambda=۰$ مقدار ویژه ماتریس A باشد، ثابت کنید ماتریس A وارون ناپذیر است.

۱۳. در هر کدام از دسته بردارهای داده شده، مشخص کنید که آیا مستقل خطی هستند یا نه؟ در صورت مستقل نبودن رابطه خطی بین آن ها را پیدا کنید.

الف)

$$x^۱=(۱,۱,۰),\ x^۲=(۰,۱,۱),\ x^۳=(۱,۰,۱)$$

ب)

$$x^{۱} = (۲, ۱, ۰),\ x^{۲} = (۰, ۱, ۰),\ x^{۳} = (-۱, ۲, ۰)$$

ج)

$$x^{۱}(t) = (e^{-t}, ۲e^{-t}),\ x^{۲}(t) = (e^{-t}, e^{-t}),\ x^{۳}(t) = (۳e^{-t}, ۰) \quad -\infty < x < \infty$$

د)

$$x^{۱}(t) = (۲\sin t, \sin t),\ x^{۲}(t) = (\sin t, ۲\sin t) \quad -\infty < t < \infty$$

۱۴. اگر $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ باشد، نشان دهید:

$$(Ax, y) = (x, A^{*}y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

۱۵. ثابت کنید مقادیر ویژه ماتریس های هرمیتی حقیقی هستند.

۱۶. ثابت کنید بردار داده شده $x = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۰ \end{pmatrix} e^{t} + ۲\begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} te^{t}$ در معادله دیفرانسیل زیر صدق می کند:

$$x' = \begin{pmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & -۲ \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} e^{t}.$$

۱۷. اگر $x^{(۱)}, ..., x^{(m)}$ بردارهایی عضو $\mathbb{R}^{n}$ باشند، در صورتی که $n < m$، نشان دهید این بردارها وابسته خطی هستند.