

تمرین تحویلی سری دوم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

تمرین ۱

برای ماتریس

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

نشان دهید

$$(A_\theta)^T = (A_\theta)^{-1} = A_{-\theta}.$$

تمرین ۲

فرم دوخطی $p(x, y, z) = 3x^2 + y^2 + 2z^2 - 2xy + 2xz - 2yz$ را در نظر بگیرید. ابتدا ماتریس مربوط به این فرم را بنویسید و سپس مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن را محاسبه کنید. از روی مقادیر ویژه، مشخص کنید که نوع آن چیست. (مثبت یا منفی یا نامعین)
آیا می‌توانید به کمک اتحادها، جواب قسمت آخر را بدون محاسبه مقادیر ویژه بدهید؟

تمرین ۳

گزاره‌های زیر را ثابت کنید.

(آ) اگر $\lambda \neq 0$ یک مقدار ویژه ماتریس وارون‌پذیر A باشد، آنگاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.
(ب) برای هر ماتریس دلخواه A ، ماتریس‌های $A^T A$ و $A A^T$ متقارن هستند.

تمرین ۴

A و B را دو ماتریس وارون‌پذیر در نظر بگیرید.

(آ) آیا لزوماً ماتریس $A + B$ وارون‌پذیر است؟

همه گروه‌ها - تمرین تحویلی سری دوم

(ب) با فرض وارون پذیری ماتریس $A + B$ ثابت کنید

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

این رابطه، شبیه رابطه $\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{ab}{a+b}$ است.