

## تمرین‌های سری ششم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

## تمرین ۱

تابع  $u(x, y)$  با مشتق‌های جزئی پیوسته مرتبه چهار دو توافقی است هرگاه تابع  $v(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  توافقی باشد، یعنی:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

ثابت کنید که  $u(x, y)$  دو توافقی است اگر و تنها اگر در معادله دو توافقی

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0,$$

صدق کند.

## تمرین ۲

اگر  $x = e^s \cos t$ ،  $y = e^s \sin t$  و  $z = u(x, y) = v(s, t)$  نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = (x^2 + y^2) \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right).$$

## تمرین ۳

ثابت کنید اگر  $f(x, y)$  در نقطه  $(a, b)$  مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه  $f(x, y)$  در  $(a, b)$  پیوسته است.

## تمرین ۴

یک بردار مماس بر منحنی فصل مشترک دو استوانه  $x^2 + y^2 = 2$  و  $y^2 + z^2 = 2$  در نقطه  $(1, -1, 1)$  را بیابید.

تمرین‌های سری ششم

تمرین ۵

اگر در سراسر قرص  $x^2 + y^2 < r^2$  داشته باشیم  $\nabla f(x, y) = 0$ ، ثابت کنید که  $f(x, y)$  در سراسر این قرص ثابت است.

تمرین ۶

اگر معادلات  $F(x, y, u, v) = 0$  و  $G(x, y, u, v) = 0$  نسبت به  $x$  و  $y$  به صورت توابعی از  $u$  و  $v$  حل داشته باشند، نشان دهید که

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}$$

تمرین ۷

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $f(x, y, z) = xyz e^{-x^2 - y^2 - z^2}$  را بیابید.

تمرین ۸

مقدار ماکزیمم تابع  $f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$  روی مثلث محدود شده به محورهای مختصات و خط  $x + y = \pi$  را بیابید.

تمرین ۹

مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع  $f(x, y) = xy - y^2$  روی قرص  $x^2 + y^2 \leq 1$  را بیابید.