

تمرین‌های سری چهارم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

تمرین ۱

نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$\text{آ) } f(x, y) = y^2, \quad (-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1)$$

$$\text{ب) } f(x, y) = 4 - x^2 - y^2, \quad (x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0)$$

$$\text{ج) } f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{د) } f(x, y) = |x| + |y|$$

تمرین ۲

در قسمت الف و ب چند منحنی تراز تابع داده شده را رسم کنید. در قسمت ج و د سطوح تراز تابع داده شده را توصیف کنید.

$$\text{آ) } f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{ب) } f(x, y) = xe^{-y}$$

$$\text{ج) } f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\text{د) } f(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{z^2}$$

تمرین ۳

چطور می‌توان تابع

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

را در مبدا تعریف کرد که در جمیع نقاط صفحه xy پیوسته شود؟

تمرین‌های سری چهارم

تمرین ۴

فرض کنید یک بردار یکه $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$ و

$$f_{\mathbf{u}}(t) = f(a + tu, b + tv),$$

تابع یک متغیره‌ای باشد که از تحدید قلمرو تابع $f(x, y)$ به نقاط خطوط مستقیم مار بر (a, b) و موازی \mathbf{u} به دست می‌آید. اگر $f_{\mathbf{u}}(t)$ ، به ازای هر بردار یکه \mathbf{u} ، در $t = 0$ پیوسته باشد، آیا پیوستگی f در (a, b) نتیجه می‌شود؟ به عکس، آیا پیوستگی f در (a, b) ، پیوستگی $f_{\mathbf{u}}(t)$ در $t = 0$ را تضمین می‌کند؟ جواب‌های خود را توجیه کنید.

تمرین ۵

چه شرایطی باید بر اعداد صحیح نامنفی m, n و p گذارد تا وجود حد

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^m y^n}{(x^2 + y^2)^p},$$

تضمین شود؟ پاسخ خود را ثابت کنید.

تمرین ۶

مشق جزئی اول تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{yx^2 - y^2}{x^2 + 3y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

را در نقطه $(0, 0)$ حساب کنید.

تمرین ۷

معادله صفحه مماس و خط قائم به نمودار تابع $f(x, y) = ye^{-x^2}$ را در نقطه $(0, 1)$ بیابید.

تمرین ۸

فاصله نقطه $(1, 1, 0)$ تا سهمیگون مستدیر به معادله $z = x^2 + y^2$ را بیابید.