به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی ۲ | تعداد سوال‌ها: ۱۰

تمرین‌های سری دوم | زمستان ۱۳۹۸

---

۱) ماتریس‌های AA^T و $A^2 = A \times A$ را در صورتی حساب کنید که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

۲) $\mathbf{x}\mathbf{x}^T$، $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ را در صورتی حساب کنید که

$$A = \begin{bmatrix} a & p & q \\ p & b & r \\ q & r & c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

۳) نشان دهید که اگر $A = \left(a_{ij}\right)$ یک ماتریس $n \times n$ باشد که $a_{ij} = 0,\ i > j$ (ماتریس A بالامثلثی باشد)، داریم $\det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{kk}$. یعنی دترمینان ماتریس A برابر حاصل‌ضرب عناصر روی قطر اصلی A است.

٤) نشان دهید که

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x,$$

و

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y).$$

سعی کنید این نتیجه را به حالت $n \times n$ تعمیم دهید.

۵) به استقرا روی n، ثابت کنید $\det(A^T) = \det(A)$ برای هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

٦) برای ماتریس

$$A_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

نشان دهید

$$(A_\theta)^T = (A_\theta)^{-1} = A_{-\theta}.$$

۷) معکوس ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

را محاسبه کنید. سپس با استفاده از آن، دستگاه خطی

$$\begin{cases} x - z = -2 \\ -x + y = 1 \\ 2x + y + 3z = 13 \end{cases}$$

را حل کنید. بعلاوه، دستگاه بالا را با استفاده از قاعده کرامر نیز حل کنید.

۸) دستگاه

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

را حل کنید.

۹) در هر بخش مشخص کنید که ماتریس متقارن داده شده، معین مثبت یا منفی، نیمه معین مثبت یا منفی، یا نامعین است.

(الف) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$،

(ب) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$،

(پ) $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$،

(ت) $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$،

(ث) $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$،

(ج) $F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۰) برای ماتریس مربعی $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، نشان دهید که

(الف) دترمینان ماتریس A برابر حاصل‌ضرب مقادیر ویژه آن ماتریس است. (راهنمایی: توجه کنید که $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ یک چندجمله‌ای درجه n است که ضریب λ^n در آن برابر $(-1)^n$ است. نشان دهید اگر λ_j، $j = 1, \dots, n$ مقادیر ویژه ماتریس A باشد، آن‌گاه $p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda_j - \lambda)$.)

(ب) A وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر تمام مقادیر ویژه ماتریس A ناصفر باشند.

(پ) اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس وارون‌پذیر A باشد، آن‌گاه $\frac{1}{\lambda}$ مقدار ویژه ماتریس A^{-1} است.

(ت) مقادیر ویژه ماتریس A^T همان مقادیر ویژه ماتریس A است. (راهنمایی: از تمرین ۵ کمک بگیرید.)