

تمرین‌های سری یازدهم

مدرس: علیشاهی و شریفی تبار

تمرین ۱

خطوط میدان برداری داده شده (در مختصات دکارتی و قطبی) را معین کنید.

$$\mathbf{F}(x, y) = \cos y \mathbf{i} - \cos x \quad (\text{آ})$$

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla \ln(x^2 + y^2) \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{F} = \hat{r} + r\hat{\theta} \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{F} = 2\hat{r} + \theta\hat{\theta} \quad (\text{د})$$

تمرین ۲

نشان دهید که $\mathbf{F} = r \sin 2\theta \hat{r} + r \cos 2\theta \hat{\theta}$ پایستار است و برای آن یک پتانسیل بیابید.

تمرین ۳

برای منحنی

$$x = e^t, \quad y = \sqrt{2}t, \quad z = e^{-t}, \quad (0 \leq t \leq 1),$$

$$(\text{آ}) \quad \text{گشتاور ماند حول محور } y \text{ یعنی}$$

$$\int_C (x^2 + z^2) ds$$

را حساب کنید.

$$(\text{ب}) \quad \text{مرکزگونی این منحنی را بیابید.}$$

تمرین‌های سری یازدهم

تمرین ۴

میدان

$$\mathbf{F} = (axy + z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (bx + 2z)\mathbf{k},$$

پایستار است. a و b و یک پتانسیل برای \mathbf{F} را پیدا کنید. هم‌چنین $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ را که در آن C منحنی از $(1, 1, 0)$ تا $(0, 0, 3)$ است که روی فصل مشترک سطوح $2x + y + z = 3$ و $9x^2 + 9y^2 + 2z^2 = 18$ در یک‌هشتم اول $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ قرار دارد، حساب کنید.

تمرین ۵

مساحت بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ را که داخل استوانه $2ay = x^2 + y^2$ قرار دارد بیابید.

تمرین ۶

انتگرال $\iint_P \frac{dS}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$ را که در آن P صفحه به معادله $Ax + By + Cz = D, (D \neq 0)$ است، حساب کنید.

تمرین ۷

شار $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$ رو به بالای مار بر سطح

$$\mathbf{r} = e^u \cos v \mathbf{i} + e^u \sin v \mathbf{j} + u \mathbf{k},$$

را که $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq \pi$ بیابید.

تمرین ۸

شار $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ رو به بالای مار بر بخشی از سطح $z = x^2 - y^2$ را که داخل استوانه $x^2 + y^2 = a^2$ قرار دارد، بیابید.

تمرین ۹

اگر S یک سطح هموار جهتدار در فضای سه بعدی و \hat{N} میدان برداری یکه‌ای باشد که جهت S را تعیین می‌کند، نشان دهید که شار \hat{N} در سراسر S مساحت S می‌باشد.