

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

تعداد سوال‌ها: ۳۱
زمستان ۱۳۹۸

ریاضی عمومی ۲
تمرین‌های سری اول

- (۱) نشان دهید که مثلث به رئوس $(1, 2, 3)$ ، $(4, 0, 5)$ و $(3, 6, 4)$ قائم‌الزاویه است.
(۲) مساحت مثلث به راس‌های $(1, 1, 0)$ ، $(1, 0, 1)$ و $(0, 1, 1)$ را بیابید.
(۳) در تمرین‌های زیر مجموعه نقاط \mathbb{R}^3 را که در معادله یا نامعادله داده شده صدق می‌کنند، توصیف (و در صورت امکان رسم) نمایید:

(الف) $y \geq -1$

(ب) $x + y = 1$

(ج) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$

(د) $y^2 + z^2 \leq 4$

(ه) $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$

(و) $x + 2y + 3z = 6$

- (۴) مجموعه نقاط در \mathbb{R}^3 را که در جفت معادلات یا نامعادلات صدق می‌کنند، توصیف (در صورت امکان رسم) نمایید:

(الف) $\begin{cases} x = 1 \\ y = z \end{cases}$

(ب) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4x \end{cases}$

(ج) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ z \geq y \end{cases}$

(د) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \end{cases}$

- (۵) موارد زیر را به ازای $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ محاسبه کنید:

(الف) $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$ ، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، $\mathbf{u} + \mathbf{v}$

(ب) طول‌های $|\mathbf{u}|$ و $|\mathbf{v}|$

(پ) بردارهای یک‌ه \mathbf{u} و \mathbf{v}

(ت) حاصل ضرب نقطه‌ای \mathbf{u} و \mathbf{v}

(ث) زاویه بین \mathbf{u} و \mathbf{v}

(ج) تصویر اسکالر \mathbf{u} در جهت \mathbf{v}

(چ) تصویر برداری \mathbf{v} در امتداد \mathbf{u}

(۶) نتیجه هندسی بیان شده در قسمت‌های زیر را با استفاده از بردارها ثابت کنید:

(الف) اقطار یک متوازی‌الاضلاع هم دیگر را نصف می‌کنند.

(ب) میانه‌های یک مثلث در نقطه مشترکی متقاطع‌اند.

(۷)

(الف) زاویه بین قطر یک مکعب و یکی از اضلاع آن را بیابید.

(ب) زاویه بین یک قطر مکعب و یک قطر یکی از وجوه آن مکعب را بیابید.

(۸) برای بردارهای $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ ، $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ مطلوبات زیر را

محاسبه کنید:

(الف) دو بردار یکه بیابید که هر یک بر \mathbf{u} و \mathbf{v} عمود باشند.

(ب) بردار \mathbf{x} صادق در دستگاه معادلات $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 9$ ، $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 4$ و $\mathbf{x} \cdot \mathbf{w} = 6$ را پیدا کنید.

(پ) دو بردار یکه بیابید که هر یک با \mathbf{u} ، \mathbf{v} و \mathbf{w} زوایای مساوی بسازد.

(۹) یک بردار یکه را بیابید که زاویه بین دو بردار ناصفر \mathbf{u} و \mathbf{v} را نصف کند.

(۱۰) فرض کنید \mathbf{u} و \mathbf{v} دو بردار باشند.

(الف) نشان دهید که $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2$.

(ب) نشان دهید که $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|$.

(پ) از الف و ب نتیجه نتیجه بگیرید $|\mathbf{u} + \mathbf{v}| \leq |\mathbf{u}| + |\mathbf{v}|$.

(۱۱) نشان دهید هرگاه \mathbf{u} ، \mathbf{v} و \mathbf{w} سه بردار یکه دو به دو عمود بر هم در \mathbb{R}^3 باشند و

$$\mathbf{r} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

آن‌گاه $a = \mathbf{r} \cdot \mathbf{u}$ ، $b = \mathbf{r} \cdot \mathbf{v}$ و $c = \mathbf{r} \cdot \mathbf{w}$.

(۱۲) ثابت‌های r ، s و t که $r \neq 0$ و $s \neq 0$ و نیز بردار \mathbf{a} صادق در $|\mathbf{a}|^2 > 4rst$ داده شده‌اند. دستگاه

معادلات

$$\begin{cases} r\mathbf{x} + s\mathbf{y} = \mathbf{a} \\ \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = t \end{cases}$$

را نسبت به بردارهای مجهول \mathbf{x} و \mathbf{y} حل کنید.

(۱۳) یک بردار یکه عمود بر صفحه شامل نقاط $(a, 0, 0)$ ، $(0, b, 0)$ و $(0, 0, c)$ را بیابید. مساحت مثلث

دارای این رئوس چقدر است؟

(۱۴) اتحادهای زیر را با استفاده از تعریف ضرب خارجی یا خواص دترمینانها تحقیق کنید.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u} \quad (\text{ب})$$

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \quad (\text{پ})$$

$$(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \quad (\text{ت})$$

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (\text{ث})$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{u} \quad \text{اگر } \mathbf{u} + \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (\text{۱۵})$$

(۱۶) یک چهاروجهی هرمی است با قاعده مثلثی و سه وجه مثلثی دیگر. چهاروجهی دارای چهار راس و شش

ضلع است. حجم آن مانند هرم یا مخروط مساوی $\frac{1}{3}Ah$ است، که در آن A مساحت قاعده و h ارتفاع عمود

بر قاعده می باشد. اگر \mathbf{u}, \mathbf{v} و \mathbf{w} بردارهای منطبق بر سه ضلع چهاروجهی باشند که در یک راس متقاطع اند،

نشان دهید که چهاروجهی دارای حجم زیر است:

$$\frac{1}{6} |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

(۱۷) صحت اتحادهای

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

را تحقیق کنید.

(۱۸) اگر $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0$ و \mathbf{x} یک بردار سه بعدی دلخواه باشد، اعداد λ, μ و ν را چنان بیابید که

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} + \nu \mathbf{w}.$$

(۱۹) اگر $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = 0$ ولی $\mathbf{v} \times \mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ ، نشان دهید که ثابتهای λ و μ وجود دارند که

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v} + \mu \mathbf{w}.$$

(۲۰) نشان دهید

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w}.$$

(۲۱) نشان دهید که

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}.$$

(۲۲) بردارهای ناصفر \mathbf{a} و \mathbf{b} در چه شرایطی باید صدق کنند تا معادله $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{b}$ نسبت به \mathbf{x} جواب داشته

باشد؟ آیا جواب منحصر به فرد است؟

(۲۳) معادلات صفحات صادق در شرایط داده شده را بیابید:

$$\text{الف) مار بر } (0, 2, -3) \text{ و قائم به بردار } 4\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\text{ب) مار بر } (1, 2, 3) \text{ و موازی صفحه } 3x + y - 2z = 15$$

(پ) مار بر سه نقطه $(1, 1, 0)$ ، $(2, 0, 2)$ و $(0, 3, 3)$.

(ت) مار بر $(1, 1, 1)$ و $(2, 0, 3)$ و عمود بر صفحه $x + 2y - 3z = 0$.

(ث) مار بر فصل مشترک صفحات $2x + 3y - z = 0$ و $x - 4y + 2z = -5$ و مار بر نقطه $(-2, 0, -1)$.

(ج) مار بر خط $\begin{cases} y - z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ و عمود بر صفحه $2x + 3y + 4z = 5$.

(۲۴) معادلات خط داده شده به شکل پارامتری برداری و اسکالر و به شکل متعارف را مشخص نمایید.

(الف) مار بر $(1, 2, 3)$ و موازی صفحه $2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$.

(ب) مار بر $(-1, 0, 1)$ و عمود بر صفحه $2x - y + 7z = 12$.

(پ) مار بر مبدا و موازی فصل مشترک صفحات $x + 2y - z = 2$ و $2x - y + 4z = 5$.

(ت) مار بر $(2, -1, -1)$ و موازی هر یک از دو صفحه $x + y = 0$ و $x - y + 2z = 0$.

(ث) مار بر $(1, 2, -1)$ که با جهات مثبت محورهای مختصات زوایای مساوی می‌سازد.

(۲۵) فواصل مطلوب را در هر قسمت بیابید:

(الف) فاصله $(1, 2, 0)$ تا صفحه $3x - 4y - 5z = 2$.

(ب) از مبدا تا خط $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 5z = 1 \end{cases}$.

(پ) فاصله بین خطوط $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - 2z = -5 \end{cases}$ و $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ y + 2z = 3 \end{cases}$.

(۲۶) نشان دهید که خط

$$x - 2 = \frac{y + 3}{2} = \frac{z - 1}{4}$$

موازی صفحه $2y - z = 1$ است. فاصله بین خط و صفحه چقدر است.

(۲۷) سطوح نموده شده با معادلات هر قسمت را شناسایی و نمودارهای آنها را رسم کنید:

(الف) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x - 8y = 8$

(ب) $z = x^2 + 2y^2$

(پ) $z = x^2 - 2y^2$

(ت) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$

(ث) $-x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(ج) $z = xy$

(چ) $x^2 + 4z^2 = 4$

(ح) $x^2 - 4z^2 = 4$

$$x^2 = y^2 + 2z^2 \quad (\text{خ})$$

$$(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \quad (\text{د})$$

$$(z - 1)^2 = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 + 4 \quad (\text{و})$$

(۲۸) اشیا هندسی نموده شده با دستگاه‌های معادلات قسمت‌های زیر را توصیف و رسم کنید:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = x + y \end{cases} \quad (\text{الف})$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \\ y = 1 \end{cases} \quad (\text{پ})$$

$$\begin{cases} z^2 = x^2 + y^2 \\ z = 1 + x \end{cases} \quad (\text{ت})$$

(۲۹) دو خانواده یک پارامتری از خطوط مستقیم واقع بر سهمی‌گون هذلولی $z = xy$ را بیابید.

(۳۰) معادله $2x^2 + y^2 = 1$ نمایش یک استوانه با مقاطع عرضی بیضوی در صفحات عمود بر محور Z است.

بردار \mathbf{a} را چنان بیابید که استوانه دارای مقاطع عرضی مستدیر عمود بر آن باشد.

(۳۱) معادله $z^2 = 2x^2 + y^2$ نمایش یک مخروط با مقاطع عرضی بیضوی در صفحات عمود بر محور Z

است. بردار \mathbf{a} را چنان بیابید که مخروط دارای مقاطع عرضی مستدیر عمود بر آن باشد.