



به نام خدا

سری ششم تکالیف دوره‌ای

درس ریاضی عمومی ۱

۲۱ خرداد ۹۹

دانشجویان محترم درس ریاضی عمومی یک، لطفاً قبل از پاسخ‌گویی به تکالیف که در صفحه‌ی بعد آمده است، به موارد زیر توجه فرمایید:

- ۱- بنا به درخواست دانشجویان محترم، مهلت ارسال پاسخ این سری از تکالیف تا ساعت ۲۴ روز شنبه ۲۴ خردادماه خواهد بود.
- ۲- پاسخ تکالیف خود را تنها باید در سامانه‌ی درس افزار شریف CW بارگذاری نموده و از ارسال پاسخ‌ها به ایمیل دستیاران آموزشی یا ایمیل اساتید محترم درس بپرهیزید.
- ۳- اجازه‌ی بارگذاری با تاخیر وجود دارد ولی به ازای هر ۳ ساعت تاخیر مقدار ۱۰ درصد از نمره‌ی کل هر دوره تکلیف کم خواهد شد. (به عنوان مثال اگر با ۹ ساعت تاخیر ارسال شود ۰.۳ نمره کسر می‌شود.)
- ۴- پاسخ تکالیف حتماً باید در قالب یک فایل PDF با کیفیت مناسب و خوانا بارگذاری شده و نام فایل حتماً باید شماره دانشجویی شخص نگارنده باشد.
- ۵- تکالیف هر بار در سایت دروس سرویس دانشکده علوم ریاضی نیز بارگذاری می‌شود و توصیه می‌شود روزانه به این سایت مراجعه نموده تا از اخبار و اطلاعیه‌های مربوطه نیز آگاه شوید.

با آرزوی موفقیت

سوال ۱

z_1 و z_2 دو نقطه روی دایره به شعاع r و به مرکز مبدا مختصات در صفحه مختلط هستند که $z_1 \neq -z_2$. نشان دهید تقاطع خطوط مماس بر دایره مذکور در نقاط z_1 و z_2 برابر است با $\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$.

سوال ۲

الف) نگاشت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ محدب است که ماکزیمم خود را می گیرد. نشان دهید f نگاشتی ثابت است.

ب) یک جسم در داخل دایره به شعاع واحد و به مرکز مبدا مختصات حول منحنی بسته ای در حال حرکت است که $\|v(t)\| = 1$ و $\|a(t)\| \leq 1$ (بردار سرعت و a بردار شتاب جسم است). نشان دهید جسم روی یک دایره حرکت می کند. آیا می توانید نشان دهید آن دایره، دایره واحد است؟

(راهنمایی: اگر $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ موقعیت جسم نسبت به زمان باشد نشان دهید $\|\gamma(t)\|^2$ یک نگاشت محدب است.)

برای یک بردار مثل $X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ منظور از $\|X\|$ مقدار $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ می باشد.

سوال ۳

نامساوی زیر را نشان دهید.

$$(b-a) \ln \sqrt{ab} \leq \int_a^b \ln(x) dx \leq (b-a) \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

که در آن $a, b > 0$ اعداد حقیقی هستند.

سوال ۴

الف) همگرایی انتگرال ناسره زیر را برای هر عدد طبیعی ثابت n بررسی کنید.

$$\int \cos nx \ln x$$

ب) نشان دهید $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \cos nx \ln x = 0$.

(راهنمایی برای قسمت (ب): انتگرال را به صورت مجموع دو انتگرال روی فواصل $[\frac{1}{n}, 1]$ و $[0, \frac{1}{n}]$ در نظر گرفته و هر

انتگرال را بطور مجزا تخمین بزنید.)

سوال ۵

انتگرال $\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$ را با تقریب 10^{-3} محاسبه کنید.

از ماشین حساب برای محاسبات معمولی (بدون برنامه نویسی) می توانید استفاده کنید.