



به نام خدا

سری چهارم تکالیف دوره‌ای

درس ریاضی عمومی ۱

۷ خرداد ۹۹

دانشجویان محترم درس ریاضی عمومی یک، لطفاً قبل از پاسخ‌گویی به تکالیف که در صفحه‌ی بعد آمده است، به موارد زیر توجه فرمایید:

۱- در صورتی که به هر دلیل به سامانه‌ی درس افزار شریف CW دسترسی ندارید و امکان بارگذاری پاسخ تکالیف برای شما در این سامانه وجود ندارد لازم است ایمیلی با عنوان «عدم دسترسی به سامانه‌ی درس افزار» به [tacalculus1@gmail.com](mailto:tacalculus1@gmail.com) ارسال نموده و مشکل خود را با ذکر نام و شماره دانشجویی بیان نمایید تا مشکل‌تان برطرف گردد.

۲- پاسخ تکالیف خود را تنها باید در سامانه‌ی درس افزار شریف CW بارگذاری نموده و از ارسال پاسخ‌ها به ایمیل مذکور یا ایمیل اساتید محترم درس بپرهیزید.

۳- اجازته‌ی بارگذاری با تاخیر وجود دارد ولی به ازای هر ۳ ساعت تاخیر مقدار ۱۰ درصد از نمره‌ی کل هر دوره تکلیف کم خواهد شد. (به عنوان مثال اگر با ۹ ساعت تاخیر ارسال شود ۰.۳ نمره کسر می‌شود.)

۴- پاسخ تکالیف حتماً باید در قالب یک فایل PDF با کیفیت مناسب و خوانا بارگذاری شده و نام فایل حتماً باید شماره دانشجویی شخص نگارنده باشد.

۵- تکالیف هر بار در سایت دروس سرویس دانشکده علوم ریاضی نیز بارگذاری می‌شود و توصیه می‌شود روزانه به این سایت مراجعه نموده تا از اخبار و اطلاعیه‌های مربوطه نیز آگاه شوید.

با آرزوی موفقیت

**سوال ۱** برای عدد طبیعی  $k$  آیا دنباله‌ی  $a_n = (1 + \frac{1}{k})(1 + \frac{1}{k^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^k})$  دارای حد متناهی است؟

**سوال ۲** نشان دهید حد دنباله‌ی  $a_n = (1 + \frac{1}{n^2})(1 + \frac{1}{n^3}) \dots (1 + \frac{1}{n^n})$  برابر  $\sqrt{e}$  است.

**سوال ۳** برای  $1 \leq a \leq 1$  - نگاشت‌های  $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f_a(x) = \begin{cases} a & x = 0 \\ \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \end{cases}$$

(الف) نشان دهید  $f_a$  ها پیوسته نیستند.

(ب) نشان دهید  $f_a$  ها دارای خاصیت مقداربینی هستند.

(ج) نشان دهید اگر  $f_a$  دارای پادمشتق باشد  $f_{-a}$  نیز پادمشتق دارد.

(د) اگر  $f_a$  و  $f_b$  دارای پادمشتق باشند نشان دهید  $a = b$ .

(ه) نشان دهید  $f_a$  ها برای  $a \neq 0$  پادمشتق ندارند.

**سوال ۴** نگاشت  $f(x) = e^{-x} - x$  را روی اعداد حقیقی در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید  $f$  دقیقاً یک ریشه دارد و این ریشه در بازه‌ی  $[0, 1]$  قرار دارد.

حال می‌خواهیم برای محاسبه‌ی تقریبی این ریشه از روش نیوتن استفاده کنیم؛ بنابراین تابع  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$  را در نظر می‌گیریم.

(ب) نشان دهید  $g$  اعداد حقیقی مثبت را به  $[0, 1]$  می‌نگارد و روی آن یک انقباض است.

(ج) آیا  $g$  روی کل اعداد حقیقی هم یک انقباض است؟

(د) دنباله‌ی  $x_{n+1} = g(x_n)$  با شرط اولیه  $x_1 = a$  برای کدام  $a$  ها به ریشه‌ی  $f$  همگراست؟

**سوال ۵** فرض کنید  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  نگاشتی مشتق‌پذیر است و عدد  $M > 0$  وجود دارد که برای هر  $x \in \mathbb{R}$  داریم  $|f'(x)| \geq M$ .

نشان دهید  $f$  یکنواست و

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$