



توضیحات: لازم است مباحث مطرح شده در بخش های ۱.۳ (تابعهای معکوس) و ۱۰.۲ و ۱۱.۲ (پادمشتقها و سرعت و شتاب) از کتاب آدامز را قبل از حل سوالات زیر مطالعه فرمایید.

سوال ۱

الف) تابع $f(x) = \frac{x-a}{bx-c}$ به ازای چه مقادیری از a, b, c خود معکوس است؟

ب) آیا یک تابع زوج می تواند خود معکوس باشد؟ یک تابع فرد چطور؟

سوال ۲

الف) وارون $g(x) = x^3 + x - 9$ را بیابید.

ب) برای تابع $f(x) = x\sqrt{3+x^2}$ مطلوبست محاسبه $(f^{-1})'(-2)$.

ج) برای تابع $f(x) = 1 + 2x^3$ مطلوبست محاسبه $(f^{-1})'(x)$.

سوال ۳

نشان دهید تابع صعودی تعریف شده بر یک بازه یک به یک است.

آیا هر تابع یک به یک تعریف شده بر یک بازه، یکنواست؟

سوال ۴

الف) نمودارهای $y = x^{\frac{1}{2}}$ و $y = x^3$ را برای $-2 \leq x \leq 2$ رسم کرده و خطهای مماس بر آنها را در نقاط $(1, 1)$ و $(-1, -1)$ بکشید.

ب) خم $y = \frac{1}{x}$ را بکشید و شیب آن در $(a, 1/a)$ را یافته و سپس معکوس خم را بیابید.

ج) معکوس $y = 1 + \frac{1}{x}$ را بیابید.

د) مشتق توابع زیر را بیابید و نمودار آنها را رسم نمایید.

$$\tan(\tan^{-1}x)$$

$$\sin^{-1}(\cos(x))$$

$$x \tan^{-1}(x)$$

$$x - \sin^{-1}(\sin(x))$$

سوال ۵

انتگرالهای نامعین داده شده را بیابید.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\int \sqrt{x} dx$$

$$\int \tan(x) \cos(x) dx$$

$$\int 2x^{1/2} + 3x^{1/3} dx$$

$$\int \frac{6(x-1)}{x^{4/3}} dx$$

$$\int \sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2} dx$$

$$\int \sin^2 x dx$$

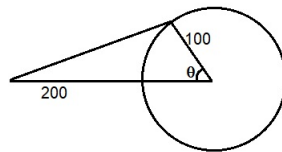
سوال ۶ در خصوص $\int \frac{1}{x} dx$ چه می‌دانید؟ بحث کنید.

سوال ۷ جواب هر مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی داده شده را بیابید.

$$\begin{cases} y' = Ax^2 + Bx + C \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = \sec x \\ y(\pi) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y'' = x^{-4} \\ y'(1) = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

سوال ۸ نشان دهید به ازای هر دو ثابت A, B تابع $y = Ax^{r_1} + Bx^{r_2}$ در معادله‌ی دیفرانسیل $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ صدق می‌کند، مشروط بر اینکه r_1, r_2 دو ریشه‌ی گویای متمایز از معادله‌ی درجه‌ی دو $ar(r-1) + br + c = 0$ باشند.

سوال ۹ الف) دونده‌ای روی مسیر دایره‌ای زیر به شعاع ۱۰۰ متر با سرعت ثابت ۷ متر بر ثانیه در جهت ساعتگرد در حال دویدن است. شخصی در فاصله‌ی ۲۰۰ متری از مرکز دایره ایستاده است. زمانی که فاصله‌ی بین آن دو ۲۰۰ متر است، فاصله‌شان با چه سرعتی در حال افزایش است؟



ب) سنگی از بالای یک صخره می‌افتد و با سرعت ۱۶ متر بر ثانیه به پایین صخره می‌خورد، ارتفاع صخره چقدر است؟
ج) نشان دهید اگر معادله‌ی مکان زمان متحرکی $x = at^2 + bt + c$ باشد آنگاه سرعت متوسط روی بازه‌ی $[t_1, t_2]$ مساوی با سرعت لحظه‌ای در نقطه‌ی میانی این بازه‌ی زمانی است.