

# تمرین‌های ریاضی عمومی ۱

## (سری ششم)

۱ اردیبهشت ۱۳۹۸

**تمرین ۱:** فرض کنید تابع  $f$  روی  $[0, a]$  انتگرال‌پذیر است.

$$\text{الف) نشان دهید } \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

ب) با استفاده از قسمت قبل، مقدار انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}}$$

**تمرین ۲:** فرض کنید  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ . مقدار انتگرال  $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx$  را به دست آورید.

**تمرین ۳:** حاصل انتگرال‌های زیر را به دست آورید:

خ) $\int_0^{3\pi/2}  \cos \theta  d\theta$	ث) $\int \sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{x}} dx$	الف) $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$
د) $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$	ج) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$	ب) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)(x^2-1)}$
ذ) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^4} dx$	چ) $\int \frac{dx}{2^x+3}$	پ) $\int \frac{\tan x}{\ln(\cos x)} dx$
ح) $\int_1^7 \sqrt{\frac{9-x}{1+x}} dx$	ح) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x^2} dx$	ت) $\int x \sin^{-1} x dx$

**تمرین ۴:** در همگرایی یا واگرایی انتگرال‌های ناسره زیر بحث کنید:

الف)  $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x - x}$

ب)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+6x+\sin x}$

پ)  $\int_0^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p}$

**تمرین ۵:** نشان دهید تابع زیر برای  $x > 0$  موجود و متناهی است:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

هم‌چنین، ثابت کنید برای هر عدد طبیعی  $n$ ،  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ .