دانشگاه صنعتی شریف-دانشکده علوم ریاضی

آزمون میانترم ریاضی مهندسی　　　　فروردین ۱۳۹۸　　　　مدت آزمون ۱۸۰ دقیقه

---

۱. تابع f را با ضابطه‌ی $f(x) = \sinh x$ در نظر بگیرید.

الف) سری فوریه‌ی توسیع متناوب f را روی $[-\pi, \pi]$ به دست آورید.

ب) سری فوریه‌ی توسیع متناوب زوج f را روی $[۰, \pi]$ به دست آورید.

۲. معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $u_t = u_{xx}$ را برای $x \in \mathbb{R}$ و $t > ۰$ با شرط $u(x, ۰) = f(x)$ که f تابعی پیوسته است و $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t) = ۰$ در نظر بگیرید.

الف) معادله را به روش جداسازی متغیرها حل کنید.

ب) معادله را به کمک تبدیل فوریه حل کنید.

۳. مطلوب است حل معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $r^۲ u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = ۰$ برای $r > ۴$ و $۰ < \theta < \pi$ با شرطهای $u(r, ۰) = ۰$ و $u(r, \pi) = ۰$ و $u(۴, \theta) = \theta$ که u تابعی کراندار و نسبت به θ متناوب است.

۴. مطلوب است حل معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $u_t - u_{xx} = ۳xt + ۱$ برای $t > ۰$ و $۰ < x < ۱$ با شرطهای $u(۰, t) = t$ و $u_x(۱, t) = t^۲$ و $u(x, ۰) = x^۲$.

۵. معادله‌ی دیفرانسیل پاره ای $u_{tt} + u_t - u_{xx} = ۰$ را برای $t > ۰$ و $۰ < x < ۲$ با شرطهای $u(۰, t) = ۰$ و $u_x(۲, t) = ۰$ و $u(x, ۰) = \sin^۲(\pi x)$ و $u_t(x, ۰) = ۱ + \sin(۴\pi x)$ حل کنید.

بارم: هر پرسش ۱۰ نمره　　　　**موفق باشید**

در صورت نیاز از چند فرمول زیر استفاده کنید.

$$\int e^{ax}\sin(bx) = \frac{۱}{a^۲ + b^۲}(ae^{ax}\sin(bx) - be^{ax}\cos(bx))$$

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad y = ce^{-\int(P(x)dx} + e^{-\int(P(x)dx}\int Q(x)e^{\int(P(x)dx}dx$$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = F(\omega) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x}dx$$

$$\mathcal{F}(f') = -i\omega\mathcal{F}(f) \quad \mathcal{F}(f(x-a)) = e^{i\omega a}\mathcal{F}(f) \quad (f * g)(x) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi$$

$$f(x) = \int_{۰}^{\infty}(A(\omega)\cos\omega x + B(\omega)\sin\omega x)dx$$

$$A(\omega) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\omega x \; dx \qquad B(\omega) = \frac{۱}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\omega x \; dx$$

$$\mathcal{F}(e^{-kx^۲}) = \sqrt{\frac{۱}{۲k}}\; e^{\frac{-\omega^۲}{۴k}}$$