پیوستگی

۱- فرض کنید f تابعی پیوسته روی $\mathbb{R}$ است و $g(x)=f(x)\int_0^x f(t)dt$ نزولی است. نشان دهید تابع باید همه جا برابر صفر باشد.

$$h(x)=\int_0^x f(t)dt \Longrightarrow \begin{cases} h'(x)=f(x) \\ h(0)=0 \end{cases}$$

چون f پیوسته است طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

$$\Longrightarrow \quad g(x)=h(x)h'(x)=\left[\frac{1}{2}h(x)^2\right]' \quad , \quad g(0)=0$$

چون g نزولی است و $g(0)=0$ داریم:

$$\begin{cases} t\geq 0 \Longrightarrow g(t)\leq g(0)=0 \\ t\leq 0 \Longrightarrow g(t)\geq g(0)=0 \end{cases}$$

$$x>0 \Longrightarrow \frac{1}{2}h(x)^2=\int_0^x g(t)dt \leq 0 \Longrightarrow h(x)^2=0 \Longrightarrow h(x)=0$$

$$x<0 \Longrightarrow \frac{1}{2}h(x)^2=\int^x g(t)dt=\int_x^0 -g(t)dt \leq 0 \Longrightarrow h(x)^2=0$$

$$\Longrightarrow h(x)=0$$

۴) مقدار بیشینه و کمینه تابع $F(x)=\int_0^{2x-x^2}\cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt$ را روی کل $\mathbb{R}$ بدست آورید:

$$H(y)=\int_0^{y}\cos\left(\frac{1}{1+t^2}\right)dt \implies F(x)=H(2x-x^2)$$

$$\implies H'(y)=\cos\left(\frac{1}{1+y^2}\right) \qquad F'(x)=2(1-x)\,H'(2x-x^2)$$

$$F'(x)=0 \implies \begin{cases} x=1 \\ H'(2x-x^2)=0 \end{cases}$$

$$H'(y)=0 \iff \cos\left(\frac{1}{1+y^2}\right)=0 \iff \frac{1}{1+y^2}=\frac{\pi}{2}+k\pi \quad (k\in\mathbb{Z})$$

$$\implies 1\leq 1+y^2=\frac{2}{\pi(1+2k)}$$

$$\frac{2}{\pi(1+2k)}\geq 1 \implies \frac{2}{\pi}\geq 1+2k \implies k\leq\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2} \implies k<0$$

$$\implies k\leq -1 \implies (1+2k)\leq -1<0 \implies 1+y^2=\frac{2}{\pi(1+2k)}<0 \quad \times$$

بنابراین برای هر y داریم $H'(y)\neq 0$ و چون $H'(0)=\cos 1>0$ بنابراین همه جا $H'>0$ برقرار است.

$$\implies \begin{cases} x>1 : F'(x)<0 \\ x<1 : F'(x)>0 \end{cases} \implies$$

F در نقطه 1 بیشینه اکید دارد و هیچ جای دیگر بیشینه یا کمینه پیدا نمی‌کند!

۳) ابتدا توجه می‌کنیم در انتگرال ناسره داده شده تابع زیر انتگرال همه جا مثبت است و در نتیجه انتگرال خوش تعریف است و می‌توان از قضایای اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال استفاده کرد:

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\int_e^{\infty}\frac{(\ln x)'}{(\ln x)}dx=\int_e^{\infty}\left[\ln(\ln(x))\right]'dx=\ln(\ln(x))\Big|_e^{\infty}=\infty$$

۴) شکلی شبیه برج ایفل داریم که محور تقارن آن بر محور z ها منطبق است و مقاطع افقی آن مربع هایی با اضلاع موازی محورهای مختصاتی است و مقاطع آن با ضلع $2x$ با رابطهٔ زیر مشخص می‌شود

$$x=\frac{\pm 1}{(1+5z)^{1/2}} \quad : \quad 0\leq z\leq 5$$

الف: حجم این شکل را با مجموع حجم n مکعب با ارتفاع یکسان تقریب بزنید.

ب: در قسمت قبل حد مقدار مجموع زمانی که $n\to\infty$ برابر انتگرال چه تابعی روی چه بازه‌ای است.

ج: حجم شکل بالا را محاسبه کنید.

پاره خط $[0,5]$ را به n قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم

$$z_0=0,\ z_1=\frac{5}{n},\ z_2=\frac{5\times 2}{n} \qquad z_k=\frac{5k}{n},\ \dots,\ z_n=5$$

یک وجه مکعب kام همان مقطع افقی شکل است با ضلع $z=\frac{5k}{n}$، که مساحت آن برابر است با $4\left(\frac{1}{\sqrt{1+5z}}\right)^2=\frac{4}{1+5z}$ و ارتفاع آن نیز برابر است با $z_k-z_{k-1}=\frac{5}{n}$. بنابراین مجموع زیر تقریبی برای حجم مورد نظر بدست می‌دهد

$$V_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{(1+5z_k)}\right)(z_k-z_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\frac{5}{n}\left(\frac{4}{1+\frac{25k}{n}}\right)$$

ب: با افزایش n، مجموع بالا که مجموع ریمان انتگرال تابع $\frac{4}{1+5z}$ است روی بازه $0\leq z\leq 5$ به مقدار $\int_0^5\frac{4dz}{1+5z}$ میل می‌کند.

ج: حجم مورد نظر را با محاسبه انتگرال بالا بدست می‌آوریم:

$$u=5z \implies du=5dz$$

$$\Rightarrow \int_{z=0}^{5}\frac{4dz}{1+5z}=\frac{4}{5}\int_{u=0}^{25}\frac{du}{1+u}=\frac{4}{5}\ln(1+25)=\frac{4}{5}\ln(26)$$

۵) راه‌حل اول: می‌دانیم سری توانی $1-x+x^2-x^3+\cdots$ روی بازه $-1<x<1$ همگرای مطلق است و مقدار آن برابر $\frac{1}{1+x}$ است. بنابر ویژگی‌های سری‌های توانی همگرا داریم:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-\cdots)\,dt = \int_0^x 1\,dt - \int_0^x t\,dt + \int_0^x t^2\,dt + \cdots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

و این سری همچنان روی بازه $-1<x<1$ همگرای مطلق است. از طرفی داریم $\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$

بنابراین $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$ است و این تساوی برای $-1<x<1$ برقرار است.

راه‌حل دوم:

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0)=0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(0)=1$$

$$f''(x) = (-1)(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(0)=-1$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!\,(1+x)^{-k} \Rightarrow f^{(k)}(0) = (-1)^{k}(k-1)!$$

چندجمله‌ای تیلور مرتبه n تابع $f(x)$ حول مبدأ

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

قضیه تیلور:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x) \quad : \quad E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^x \frac{(x-t)^n(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,dt = (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

1) $0<t<x<1 \Rightarrow (1+t)>1 \Rightarrow |E_n(x)| \leq \int_0^x (x-t)^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} < \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

2) $-1<x<t<0 \Rightarrow \left|\frac{x-t}{1+t}\right| = \frac{t-x}{1+t} \leq |x| \Rightarrow |E_n(x)| < \frac{1}{x+1}\int_0^{|x|} |x|^n dt \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$$

۶. می‌دانیم سری $(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k$ برای xهای در یک همسایگی مبدأ برقرار است که در آن

$$\binom{r}{0}=1\ ,\quad \binom{r}{k}=\frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}\quad (k\geq 1)$$

الف: نشان دهید شعاع همگرایی سری بالا برابر 1 است.

ب. با توجه به ویژگی‌های سری‌های همگرای مطلق نشان دهید

$$\sum_{\substack{k+l=m\\ k,l\geq 0}}\binom{r}{k}\binom{s}{l}=\binom{r+s}{m}$$

ج. نشان دهید $f_r(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}z^k$ برای اعداد مختلط $|z|<1$ همگرای مطلق است. و داریم $f_r(z).f_s(z)=f_{r+s}(z)$.

د. نشان دهید $1+\frac{i}{4}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(2k-2)!\,i^k}{k!\,(k-1)!\,2^{3k-2}}$ یک ریشه دوم $1+\frac{i}{2}$ است.

الف:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=\frac{\dfrac{|r(r-1)\cdots(r-k)|}{(k+1)!}}{\dfrac{|r(r-1)\cdots(r-k+1)|}{k!}}=\frac{|r-k|}{(k+1)}\xrightarrow[k\to\infty]{}1$$

با توجه به اینکه حد نسبت $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ وجود دارد و برابر 1 است بنابراین شعاع همگرایی سری بالا طبق آزمون نسبت برابر $\frac{1}{1}=1$ است.

ب: چون برای هر $|x|<1$ سری‌های $(1+x)^r=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k$, $(1+x)^s=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s}{l}x^l$ همگرای مطلق‌اند:

$$(1+x)^{r+s}=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s}{l}x^l\right)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\binom{r}{k}\binom{s}{l}x^{k+l}=\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{k+l=m\\ k,l\geq 0}}\binom{r}{k}\binom{s}{l}\Bigg)x^m$$

$$(1+x)^{r+s}=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{r+s}{m}x^m\implies\sum_{\substack{k+l=m\\ k,l\geq 0}}\binom{r}{k}\binom{s}{l}=\binom{r+s}{m}$$

(دو سری توانی که با شعاع همگرایی مثبت که با یکدیگر مساوی اند باید دارای ضرایب یکسان باشند)

ج: با توجه به اینکه آزمون نسبت برای محاسبه شعاع همگرایی یک سری توانی مختلط نیز قابل استفاده است کاملاً مانند قسمت (الف) شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}z^k$ در اعداد مختلط نیز برابر 1 است و در نتیجه برای $|z|<1$ این سری همگرای مطلق است. حال مانند محاسباتی که در قسمت (ب) صورت گرفت با توجه به همگرایی مطلق سری‌های بالا داریم:

$$f_r(z).f_s(z)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}z^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{s}{l}z^l\right)=\sum_{k,l=0}^{\infty}\binom{r}{k}\binom{s}{l}z^{k+l}=\sum_{m=0}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{k+l=m\\ k,l\geq 0}}\binom{r}{k}\binom{s}{l}\Bigg)z^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\binom{r+s}{m}z^m=f_{r+s}(z)$$

د. با توجه به اینکه $|\frac{i}{2}|<1$ و بنا به قسمت قبل داریم:

$$f_{1/2}(i/2)^2 = f_{1/2}(\tfrac{i}{2})\cdot f_{1/2}(\tfrac{i}{2}) = f_1(i/2) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1}{k}(\tfrac{i}{2})^k = 1+\tfrac{i}{2}$$

بنابراین $f_{1/2}(\frac{i}{2})$ یک ریشه دوم $1+\frac{i}{2}$ است. حال داریم:

$$f_{1/2}(i/2) = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}(i/2)^k$$

$$\binom{1/2}{0}=1,\quad \binom{1/2}{1}=\frac{1}{2},\quad \binom{1/2}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}}{2},\quad \binom{1/2}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-3}{2}}{3!},\ \dots,\ \binom{1/2}{k}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdots\overbrace{(\frac{1}{2}-k+1)}^{\frac{-(2k-3)}{2}}}{k!}$$

$k>1$:

$$\binom{1/2}{k} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdots\frac{-(2k-3)}{2}}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k!\,2^k}\cdot\left[1\times3\times\cdots\times(2k-3)\right]$$

$$\left[1\times3\times\cdots\times(2k-3)\right] = 1\times3\times\cdots\times(2k-3)\times\frac{2\times4\times\cdots\times(2k-2)}{2\times4\times\cdots\times(2k-2)} = \frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}$$

$$\Rightarrow \binom{1/2}{k} = \frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}(k-1)!\,k!}$$

$$\Rightarrow f_{1/2}(i/2) = 1+\frac{1}{2}(\frac{i}{2})+\sum_{k=2}^{\infty}\binom{1/2}{k}(i/2)^k$$

$$= 1+\frac{i}{4}+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!\,i^k}{(k-1)!\,k!\,2^{3k-2}}$$