به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

معادلات دیفرانسیل (۲۲۰۳۴) مدت امتحان: ۳ ساعت

کلید امتحان میان ترم (همه‌ی گروه‌ها) ۲۹ فروردین ۱۳۹۷

- استفاده از ماشین حساب به هیچ وجه مجاز نیست.
- در آزمون، پاسخ سوالات را به ترتیب و هر یک را در برگه جداگانه‌ای از پاسخنامه بنویسید.
- اگر از گزاره‌ای در کتاب، برای حل سوالها استفاده می‌کنید، لازم است گزاره مورد نظر را ابتدا به صورت شفاف و دقیق بیان کرده و سپس آن را بکار گیرید.

۱. الف) معادله دیفرانسیل خطی مرتبه چهارم با ضرایب ثابت زیر

$$y^{(4)}+a_3y^{(3)}+a_2y^{(2)}+a_1y'+a_0y=0$$

را بیابید که توابع زیر در آن صدق کنند (توجه کنید که $y^{(n)}$ یعنی مشتق مرتبه n-ام.) (۱۰ نمره)

$$\sin t,\quad \cos t,\quad t\sin t,\quad t\cos t.$$

پاسخ. با توجه به جوابها، معادله مشخصه باید به‌صورت

$$(\lambda-i)^2(\lambda+i)^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad (\lambda^2+1)^2=\lambda^4+2\lambda+1=0$$

باشد. پس

$$a_0=1,\ a_1=0,\ a_2=2,\ a_3=0 \quad\Longleftrightarrow\quad y^{(4)}+2y''+y=0.$$

در مجموع ۱۰ نمره برای محاسبه ضرایب و به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

ب) با ضرایب به‌دست آمده در قسمت قبل، جواب عمومی معادله ناهمگن زیر را به‌دست آورید (۱۰ نمره)

$$y^{(4)}+a_3y^{(3)}+a_2y^{(2)}+a_1y'+a_0y=t^2+t\sin t.$$

پاسخ. با توجه به اصل برهم نهی یک جواب خصوصی برای هر یک از معادلات

$$\begin{cases} y_1^{(4)}+2y_1''+y_1=t^2 \\ y_2^{(4)}+2y_2''+y_2=t\sin t=\frac{te^{it}-te^{-it}}{2i}=\frac{te^{it}-\overline{te^{it}}}{2i}. \end{cases}$$

می‌یابیم و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم تا یک جواب خصوصی برای معادله $y^{(۴)}+۲y''+y=t^۲+t\sin t$ به‌دست آوریم.

$$y_۱=at^۲+bt+c \quad \Longrightarrow \quad \forall\, t \quad t^۲=۴a+at^۲+bt+c \quad \Longrightarrow \quad a=۱,\ b=۰,\ c=-۴$$
$$\Longrightarrow \quad y_۱=t^۲-۴.$$

در مجموع ۲ نمره برای محاسبه $y_۱$.

برای محاسبه $y_۲$ فرض می‌کنیم جواب به‌صورت $y_۲=\frac{q(t)e^{it}-\overline{q(t)e^{it}}}{۲i}$ باشد. برای $z(t):=q(t)e^{it}$ داریم

$$\begin{aligned}
z(t)&=q(t)e^{it}\\
z'(t)&=[q'(t)+iq(t)]e^{it}\\
z''(t)&=[q''(t)+۲iq'(t)-q(t)]e^{it}\\
z^{(۳)}(t)&=[q^{(۳)}(t)+۳iq''(t)-۳q'(t)-iq(t)]e^{it}\\
z^{(۳)}(t)&=[q^{(۴)}(t)+۴iq^{(۳)}(t)-۶q''(t)-۴iq'(t)+q(t)]e^{it}
\end{aligned}$$

حتی با استفاده از فرمول لایب نیتس برای مشتقات fg نیازی به محاسبه مشتق اول و سوم نیست، زیرا که در معادله ظاهر نمی‌شوند. اکنون با قرار دادن $z(t)$ در معادله $z^{(۴)}+۲z''+z=te^{it}$ دیده می‌شود که

$$e^{it}[q^{(۴)}(t)+۴iq^{(۳)}(t)-۴q''(t)]=te^{it}.$$

پس $q(t)=At^۳+Bt^۲$ و با قرار دادن آن در معادله بالا داریم

$$\forall\, t \quad ۲۴iA-۲۴At-۸B=t$$

و درنتیجه $A=-\frac{۱}{۲۴}$ و $B=-\frac{i}{۸}$. از طرفی $y_۲=\frac{z-\overline{z}}{۲i}$. پس

$$y_۲=-\frac{t^۳}{۲۴}\sin t-\frac{t^۲}{۸}\cos t.$$

در مجموع ۲ نمره برای محاسبه $y_۲$.

در نهایت جواب عمومی معادله به‌صورت زیر است.

$$c_۱\sin t+c_۲\cos t+c_۳t\sin t+c_۴t\cos t+(t^۲-۴)+\left[-\frac{t^۳}{۲۴}\sin t-\frac{t^۲}{۸}\cos t\right]$$

در مجموع ۱ نمره برای محاسبه جواب نهایی.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۲. معادله زیر را درنظر بگیرید

$$x'(t)=x^{\alpha}(t), \quad x(۰)=۰.$$

الف) آیا برای $0 < \alpha < 1$ معادله بالا جواب یکتا دارد؟ چرا؟ (۱۰ نمره)

پاسخ. برای $\alpha \in (0, 1)$، $\frac{\partial}{\partial x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ در $x = 0$ پیوسته نیست. پس نمی‌توان از قسمت یکتایی قضیه وجود و یکتایی استفاده کرد. به روشنی تابع ثابت صفر در معادله صدق می‌کند. افزون بر آن اگر $x(t)$ جوابی باشد که برای $t \in [0, a]$ برابر صفر و برای $t > a$ داشته باشیم $x(t) \neq 0$، داریم

$$\begin{aligned} &\frac{x'}{x^\alpha} = 1 \quad \iff \quad \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_a^t = t - a \\ &\implies \quad x(t) = [(1-\alpha)(t-a)]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

به‌عبارت دیگر برای هر $a \geq 0$ یک جواب برای معادله یافتیم که برای a مختلف باهم متفاوت هستند. پس این معادله با این شرط اولیه جواب یکتا ندارد.

البته معرفی دو جواب متفاوت برای معادله با شرط اولیه داده شده، به تنهایی یکتایی جواب را نقض می‌کند.

در مجموع ۱۰ نمره برای اینکه با استدلال درست یکتا نبودن جواب را نشان داده شود.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

ب) برای $\alpha \geq 1$ همه جوابهای این معادله را به‌دست آورید. (۱۰ نمره)

پاسخ. برای $\alpha \in [1, +\infty)$، $\frac{\partial}{\partial x}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ در $x = 0$ پیوسته است. پس می‌توان از قضیه وجود و یکتایی استفاده کرد. به روشنی تابع ثابت صفر در معادله صدق می‌کند. پس تنها جواب معادله تابع ثابت صفر است.

در مجموع ۱۰ نمره برای به‌دست آوردن جواب و اینکه جواب یکتاست.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۳. معادله مرتبه اول $x^2 + y = xy'$ را در نظر بگیرید. یک جواب $y(x)$ از این معادله که روی کل $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد را بیابید به‌طوریکه $y(1) = 2$. آیا این جواب یکتاست؟ (۲۰ نمره)

پاسخ. چون معادله کامل نیست، عامل انتگرال ساز برحسب x را برای حل آن امتحان می‌کنیم.

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial y}[(x^2+y)\mu(x)] &= \mu(x) \\ \tfrac{\partial}{\partial x}[-x\mu(x)] &= -\mu(x) - x\mu'(x) \\ \tfrac{\partial}{\partial y}[(x^2+y)\mu(x)] &= \tfrac{\partial}{\partial x}[-x\mu(x)] \end{aligned}\right\} \implies \quad -\mu(x) - x\mu'(x) = \mu(x)$$
$$\implies \quad x\mu'(x) + 2\mu(x) = 0.$$

پس با فرض $x \neq 0$، $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$ می‌تواند به عنوان عامل انتگرال ساز بکار گرفته شود. پس با این عامل انتگرال ساز داریم

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial x}F(x,y) = (x^2+y)\mu(x) &= 1 + \tfrac{y}{x^2} \\ \tfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= -\tfrac{1}{x} \end{aligned}\right\} \implies \quad F(x,y) = \int -\frac{1}{x}dy = \frac{-y}{x} + f(x)$$
$$\implies \quad 1 + \frac{y}{x^2} = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = \frac{y}{x^2} + f'(x) \quad \implies \quad 1 = f'(x) \quad \implies \quad f(x) = x + k$$
$$\implies \quad F(x,y) = x - \frac{y}{x} = c. \quad (x \neq 0)$$

در مجموع ۱۰ نمره برای به‌دست آوردن جواب (جواب موضعی).

راه حل بالا در بازه $(\circ, +\infty)$ و $(-\infty, \circ)$، طبق قضیه وجود و یکتایی جواب، جوابها برای هر شرط اولیه $x_\circ \neq \circ$ و $y_\circ$ (در ناحیه مورد بررسی) به‌صورت

$$x - \frac{y}{x} = x_\circ - \frac{y_\circ}{x_\circ} = c \quad \Longleftrightarrow \quad y = x^{۲} - cx$$

خواهند بود. اکنون با شرط اولیه $x = ۱$ و $y = ۲$ تساوی پایین را داریم.

$$x - \frac{y}{x} = c = ۱ - \frac{۲}{۱} = -۱$$

با توجه به اینکه شرط اولیه در زمان مثبت داده شده است، پس جواب در ناحیه $x > \circ$ به‌صورت $y = x^{۲} + x$ است. از طرفی باتوجه به خود معادله، باید بتوان در طرفین $xy' = y + x^{۲}$ مقدار $x = \circ$ را قرار داد. پس باید تابع y در مبدا نیز مشتق‌پذیر باشد. در نتیجه اگر به‌دنبال جوابی از معادله بر $\mathbb{R}$ هستیم باید c مناسبی را پیدا کنیم که

$$-c = ۲x - c|_{x=\circ} = y'_-(\circ) = y'_+(\circ) = ۲x + ۱|_{x=\circ} = ۱ \quad \Longrightarrow \quad c = -۱.$$

پس جواب سرتاسری همان $y = x^{۲} + x$ و درنتیجه یکتاست.

در مجموع ۱۰ نمره برای به‌دست آوردن جواب سرتاسری.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۴. نشان دهید دو تابع برداری با ضابطه‌های

$$\begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ \cos^{۲} t \end{pmatrix}$$

مستقل خطی هستند. آیا دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اولی مانند $X'(t) = A(t)X(t)$ وجود دارد که درایه‌های ماتریس $A(t)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته باشند و ماتریس جواب اساسی آن

$$\begin{pmatrix} e^t & e^t \sin t \\ \sin t & \cos^{۲} t \end{pmatrix}$$

باشد؟ (۱۰ نمره)

پاسخ. ابتدا استقلال خطی دو تابع برداری را ثابت می‌کنیم. برای این منظور فرض می‌کنیم

$$\forall t \quad A \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} e^t \sin t \\ \cos^{۲} t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall t \quad \begin{pmatrix} e^t & e^t \sin t \\ \sin t & \cos^{۲} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

از طرفی

$$W(t) := \det \begin{pmatrix} e^t & e^t \sin t \\ \sin t & \cos^۲ t \end{pmatrix} = e^t \cos ۲t$$

برای $t \neq \frac{(۲k+۱)\pi}{۴}$ که $k \in \mathbb{Z}$، $W(t) \neq ۰$. پس باید A و B باید هر دو صفر باشند و این به معنای استقلال خطی دو تابع برداری مورد نظر سوال است.

در مجموع ۵ نمره برای نشان دادن استقلال خطی این دو تابع برداری.

از طرفی دیگر اگر این دو تابع برداری و مستقل خطی، جوابهای یک دستگاه خطی $X'(t) = A(t)X(t)$ با درایه‌های پیوسته $A(t)$ بر $\mathbb{R}$ باشد، طبق قضیه آبل باید رونسکین آن دو یا همان تابع W قسمت بالا، همیشه صفر یا هیچ جا ناصفر باشد. اما

$$\begin{cases} t \neq \frac{(۲k+۱)\pi}{۴}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad W(t) \neq ۰ \\ t = \frac{(۲k+۱)\pi}{۴}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad W(t) = ۰. \end{cases}$$

پس دستگاه معادلات دیفرانسیل $X'(t) = A(t)X(t)$ با درایه‌های پیوسته $A(t)$ بر $\mathbb{R}$ وجود ندارد که این دو تابع برداری جوابهای آن باشند.

در مجموع ۵ نمره برای اینکه با برهان درست ثابت شود چنین معادله دیفرانسیلی وجود ندارد.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۵. دستگاه معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرط اولیه

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(۰) \\ y(۰) \\ z(۰) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۷ \\ ۰ \\ -۲ \end{pmatrix}$$

را حل کنید. (۲۰ نمره)

پاسخ. ابتدا مقادیر ویژه ماتریس مورد نظر سوال را محاسبه می‌کنیم.

$$\det \begin{pmatrix} ۱-\lambda & ۲ & ۰ \\ ۲ & ۱-\lambda & ۳ \\ ۰ & ۳ & ۱-\lambda \end{pmatrix} = (۱-\lambda)\left[(۱-\lambda)^۲ - ۹\right] - ۲ \times ۲(۱-\lambda)$$
$$= (۱-\lambda)\left[(۱-\lambda)^۲ - ۱۳\right] = ۰$$
$$\implies \quad \lambda_۱ = ۱,\ \lambda_۲ = ۱ + \sqrt{۱۳},\ \lambda_۳ = ۱ - \sqrt{۱۳}$$

در مجموع ۶ نمره برای به‌دست آوردن مقادیر ویژه.

در گام به بعدی به محاسبه برداری ویژه این مقادیر می‌پردازیم.

برای $\lambda_1 = 1$ داریم

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

پس یک کاندید برای بردار ویژه متناظر با آن می‌تواند بردار $\xi_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ باشد. برای $\lambda_2 = 1 + \sqrt{13}$ داریم

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{13} & 2 & 0 \\ 2 & -\sqrt{13} & 3 \\ 0 & 3 & -\sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

پس یک کاندید برای بردار ویژه متناظر با آن می‌تواند بردار $\xi_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$ باشد. برای $\lambda_1 = 1 - \sqrt{13}$ داریم

$$\begin{pmatrix} \sqrt{13} & 2 & 0 \\ 2 & \sqrt{13} & 3 \\ 0 & 3 & \sqrt{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

پس یک کاندید برای بردار ویژه متناظر با آن می‌تواند بردار $\xi_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$ باشد.

در مجموع ۶ نمره برای به‌دست آوردن برداری ویژه.

پس جواب عمومی به‌صورت

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} c_1 e^{t} + \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix} c_2 e^{(1+\sqrt{13})t} + \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix} c_3 e^{(1-\sqrt{13})t} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{13} & -\sqrt{13} \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{(1+\sqrt{13})t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{(1-\sqrt{13})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

است. اکنون با توجه به شرط اولیه داریم

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & \sqrt{13} & -\sqrt{13} \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\implies \quad c_3 = c_2 \quad \implies \quad \begin{cases} 3c_1 + 4c_2 = 7 \\ -2c_1 + 6c_2 = -2 \end{cases} \quad \implies \quad c_1 = \frac{25}{13},\ c_2 = \frac{4}{13}.$$

در مجموع ۶ نمره برای محاسبه ضرایب c_1 و c_2 و c_3.

پس جواب آخر به‌صورت زیر خواهد بود.

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \frac{25}{13} e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{4}{13} e^{(1+\sqrt{13})t} \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{4}{13} e^{(1-\sqrt{13})t} \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{13} \\ 3 \end{pmatrix}$$

در مجموع ۲ نمره برای جواب نهایی.

* هر پاسخ درست دیگر، قابل قبول است.

۶. برای $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ دسته خمهای $y = cx^2 + \frac{1}{c}$ را درنظر بگیرید. معادله دیفرانسیل را بیابید که این خمها در آن صدق کنند. آیا معادله دیفرانسیلی که به‌دست آورده‌اید به غیر از این خمها و تابع $y = 2x$ جواب دیگری نیز دارد؟

(۱۰ نمره)

پاسخ.

$$y = cx^2 + \frac{1}{c} \quad \implies \quad y' = 2cx$$

با فرض $x,\ c \neq 0$، c را حذف می‌کنیم. داریم

$$c = \frac{y'}{2x} \quad \implies \quad y = \frac{y'}{2x}x^2 + \frac{2x}{y'} \quad \implies \quad 2yy' = x(y')^2 + 4x.$$

در مجموع ۵ نمره برای به‌دست آوردن معادله دیفرانسیل.

*هر معادله دیگری که صحیح باشد قبول است.

توجه کنید که همه توابع $y = cx^2 + \frac{1}{c}$ برای $c \neq 0$ در این معادله صدق می‌کنند.

همچنین توجه کنید که $y = 2x$ در معادله صدق می‌کند و پوش دسته منحنی مربوطه است. بنابر تقارن، تابع $y = -2x$ هم در معادله صدق می‌کند. پس یک جواب است.

در مجموع ۵ نمره برای به‌دست آوردن جواب دیگر.

* به هر روشی یک جواب دیگر به‌دست آورند قابل قبول است.

موفق باشید