به نام خدا

دانشگاه صنعتی شریف

دانشکده علوم ریاضی

ریاضی عمومی یک (۲۲۰۱۵)

پاسخنامه امتحان میان ترم (همه‌ی گروه‌ها)

مدت امتحان: ۳ ساعت

۴ اردیبهشت ۱۳۹۷

• هر راه حل درست دیگری مورد قبول است. در این پاسخنامه به همه راه حلهای ممکن سوالهای آزمون نمی‌پردازیم.

۱. هر سه ریشه حقیقی معادله درجه سوم زیر را محاسبه کنید. در انتخاب روش حل آزاد هستید. (۲۰ نمره)

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0$$

پاسخ. ابتدا معادله را به شکلی تبدیل می‌کنیم که در آن عبارت درجه دوم نباشد.

$$0 = x^3 + 3x^2 - 3 = (x+1)^3 - 3(x+1) - 1\,, \quad z := x + 1$$

اکنون به حل معادله $z^3 - 3z - 1 = 0$ می‌پردازیم. برای این کار تغییر متغیر $z = 2\cos\alpha$ را درنظرمی‌گیریم. در نتیجه داریم

$$0 = (2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha) - 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos 3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3\alpha = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}\ k \in \mathbb{Z} \quad \Longleftrightarrow \quad z = 2\cos\alpha = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\pi}{9}\right)\ k \in \mathbb{Z}$$

با توجه به قرارگرفتن این قوسها در دایره مثلثاتی داریم

$$z = 2\cos\alpha = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{9}\right)\ \ k = 0,\ 1,\ 2$$

پس برای جواب نهایی داریم

$$x = z - 1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) - 1\,,\ 2\cos\left(\frac{7\pi}{9}\right) - 1\,,\ 2\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) - 1$$

۲. خط به معادله $2x + 5y + 10 = 0$ در $\mathbb{R}^2$ را درنظر بگیرید. نگاشت $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ برای قرینه کردن نقطه (a,b) نسبت به این خط را بیابید. استفاده کردن از مطالبی که در کلاس گذشت، بلامانع است. (۱۵ نمره)

پاسخ. قرار می‌دهیم

$$\begin{cases} \Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ \Phi(x,y) = (x, y+2) \end{cases}$$

این انتقال خط مورد نظر سوال را به خط مبدا گذر $۲x + ۵y = ۰$ می‌نگارد. از آنچه در کلاس گذشت می‌دانیم ماتریس تقارن نسبت به این خط جدید بصورت زیر است

$$\begin{pmatrix} \cos ۲\theta & \sin ۲\theta \\ \sin ۲\theta & -\cos ۲\theta \end{pmatrix}$$

که در آن $\tan\theta = -\frac{۲}{۵}$. از طرفی بنابر اتحادهای مثلثاتی داریم

$$\cos ۲u = \frac{۱ - \tan^۲ u}{۱ + \tan^۲ u}\ ,\ \sin ۲u = \frac{۲\tan u}{۱ + \tan^۲ u}$$

در پی آن

$$\cos ۲\theta = \frac{۲۱}{۲۹}\ ,\ \sin ۲\theta = -\frac{۲۰}{۲۹}.$$

پس در نهایت بعد از تقارن با ماتریس با درایه‌های بالا و سپس اعمال انتقال $\Phi^{-۱}(x,y) = (x, y - ۲)$ داریم

$$T(a,b) = \Phi^{-۱}\left(\begin{pmatrix} \frac{۲۱}{۲۹} & -\frac{۲۰}{۲۹}. \\ -\frac{۲۰}{۲۹} & -\frac{۲۱}{۲۹} \end{pmatrix}\Phi(x,y)\right) = \Phi^{-۱}\left(\begin{pmatrix} \frac{۲۱}{۲۹} & -\frac{۲۰}{۲۹}. \\ -\frac{۲۰}{۲۹} & -\frac{۲۱}{۲۹} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b + ۲ \end{pmatrix}\right)$$
$$= \Phi^{-۱}\left(\frac{۱}{۲۹}\begin{pmatrix} ۲۱a - ۲۰b - ۴۰ \\ -۲۰a - ۲۱b - ۴۲ \end{pmatrix}\right) = \frac{۱}{۲۹}\begin{pmatrix} ۲۱a - ۲۰b - ۴۰ \\ -۲۰a - ۲۱b - ۱۰۰ \end{pmatrix}$$

۳. ناحیه $A := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - ۳| = ۲|z + ۶i|\}$ را مشخص و آن را در صفحه مختلط رسم کنید. استدلالی برای جواب خود بیان کنید، مانند برهان هندسی یا محاسبات جبری. (۱۵ نمره)

پاسخ.

$$\begin{aligned} & |z - ۳| = ۲|z + ۶i| \quad \Longleftrightarrow \quad |z - ۳|^۲ = ۴|z + ۶i|^۲ \\ \Longleftrightarrow \quad & (z - ۳)(\overline{z} - ۳) = ۴(z + ۶i)(\overline{z} - ۶i) \\ \Longleftrightarrow \quad & |z|^۲ - ۳(z + \overline{z}) + ۹ = ۴\left(|z|^۲ + ۶i(z + \overline{z}) + ۳۶\right) \\ \Longleftrightarrow \quad & ۳|z|^۲ + ۲۴i(z + \overline{z}) + ۳(z + \overline{z}) + ۱۳۵ = ۰ \\ \Longleftrightarrow \quad & |z|^۲ + ۸i(z + \overline{z}) + (z + \overline{z}) + ۴۵ = ۰ \end{aligned}$$

اکنون با قرار دادن $z = x + iy$ داریم

$$x^۲ + y^۲ + ۸i(x - iy - x - iy) + (x + iy + x - iy) + ۴۵ = ۰$$
$$\Longleftrightarrow \quad x^۲ + y^۲ + ۱۶y + ۲x + ۴۵ = ۰ \quad \Longleftrightarrow \quad (x + ۱)^۲ + (y + ۸)^۲ = ۲۰$$

و این دایره‌ای است به مرکز $-۱ - ۸i$ و شعاع $\sqrt{۲۰}$.

۴. مطلوبست محاسبه حد پایین. (۱۵ نمره)

$$\lim_{n\to\infty} n^n\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)\sin\left(\frac{۲^n}{n!}\right)$$

پاسخ. از آنچه در کلاس گذشت می‌دانیم

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۲^n}{n!}=۰.$$

با توجه به حد

$$\lim_{u\to ۰}\frac{\sin u}{u}=۱$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty} n^n\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)\sin\left(\frac{۲^n}{n!}\right)=\left(\lim_{n\to\infty} n^n\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)\frac{۲^n}{n!}\right)\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{۲^n}{n!}\right)}{\frac{۲^n}{n!}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty} n^n\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)\frac{۲^n}{n!}$$

حال دنباله $n^n\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)\frac{۲^n}{n!}$ را بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{n^n۲^n}{n!}\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)&\geq\frac{n^n۲^n}{n!}\frac{۱}{\sqrt[n]{۳^n+۱}^{n-۱}+۳\sqrt[n]{۳^n+۱}^{n-۲}+\cdots+۳^{n-۲}\sqrt[n]{۳^n+۱}+۳^{n-۱}}\\&\geq\frac{n^n۲^n}{n!}\times\frac{۱}{n\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}\right)^{n-۱}}\geq\frac{n^n۲^n}{n!}\times\frac{۱}{n\left(\sqrt[n]{۳^n+۳^n}\right)^{n-۱}}\\&=\frac{n^n۲^n}{n!}\times\frac{۱}{n\left(\sqrt[n]{۲\times۳^n}\right)^{n-۱}}=\frac{n^n۲^n}{n!}\times\frac{۱}{n۳^{n-۱}}\times\frac{۱}{۲^{\frac{n-۱}{n}}}=\frac{۲}{۲^{\frac{n-۱}{n}}}\times\frac{۱}{n!}\left(\frac{۲n}{۳}\right)^{n-۱}\end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $a:=\frac{۲}{۳}$ در واقع داریم

$$\frac{n^n۲^n}{n!}\left(\sqrt[n]{۳^n+۱}-۳\right)\geq\frac{۲(an)^{n-۱}}{n!}\times\frac{۱}{۲^{\frac{n-۱}{n}}}=\frac{۲(an)^{n-۱}}{n!}\times\sqrt[n]{۲}$$

اکنون به بررسی دنباله $x_n:=\frac{(an)^{n-۱}}{n!}$ می‌پردازیم.

$$\begin{aligned}x_{n+۱}&=\frac{(a(n+۱))^n}{(n+۱)!}=\frac{aa^{n-۱}(n+۱)^n}{n!\times(n+۱)}=\frac{aa^{n-۱}(n+۱)^{n-۱}}{n!}\frac{n^{n-۱}}{n^{n-۱}}\\&=\frac{(an)^{n-۱}}{n!}\times a\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n-۱}=x_n\times a\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n-۱}\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم برای $n\geq ۱$

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n=\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}\frac{۱}{n^k}\geq ۱+۱=۲\quad(k=۰,\ ۱)$$

و همچنین برای $n > 4$ روشن است که $\frac{n}{n+1} > \frac{4}{5}$. پس داریم

$$x_{n+1} \geq x_n \times a\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{n}{n+1} \geq x_n \times \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{4}{5} \geq x_n \times \frac{2}{3} \times 2 \times \frac{4}{5} = x_n \frac{16}{15}$$

و در پی آن برای $n > 4$

$$\frac{n^n 2^n}{n!}\left(\sqrt[n]{3^n+1}-3\right) \geq \frac{1}{n!}\left(\frac{2n}{3}\right)^{n-1}\sqrt[n]{2} = x_n\sqrt[n]{2} \geq \left(\frac{16}{15}\right)^{n-1}\sqrt[n]{2}.$$

ولی به روشنی داریم

$$\left|\sqrt[n]{2}-1\right| = \frac{2-1}{\sqrt[n]{2^{n-1}}+\cdots+1} \leq \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2} = 1.$$

پس در نهایت

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{3^n+1}-3\right)\sin\left(\frac{2^n}{n!}\right) = +\infty$$

۵. حد زیر را محاسبه کنید. استفاده از انتگرال مجاز نیست. (۲۰ نمره)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

پاسخ. می‌دانیم

$$-2\sin x\sin y = \cos(x+y)-\cos(x-y)$$

حال با استفاده از این اتحاد داریم

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}-\frac{k\pi}{n}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}\\
&= \frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{-2\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}
\end{aligned}$$

پس در نهایت خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\lim_{n\to\infty}2\times\frac{\pi}{2n}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)} = 2$$

۶. نمایش در مبنای دوی اعداد در بازه $(0,1)$ را طوری درنظر بگیرید که این نمایش فاقد دنباله تکرار شونده $111\ldots$ باشد و تابع $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ را بصورت $f\left((0/a_1a_2a_3\ldots)_2\right) := (0/a_10a_20a_30\ldots)_2$ تعریف کنید. آیا این تابع در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته است؟ چرا؟ (۱۵ نمره)

یادآوری: برای $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{0,1\}$، منظور از $a = (0/a_1a_2a_3\dots)_2$ نمایش در مبنای دوی عدد $a \in [0,1]$ است و

$$a = (0/a_1a_2a_3\dots)_2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}.$$

پاسخ. پیوسته نیست. زیرا که برای دنباله

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} < \frac{1}{2}$$

داریم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\,, \;\; f(x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{2k+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k+1}} = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}\,, \;\; f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

موفق باشید