ریاضیّات مهندسی (۲۲۰۳/۵)

آزمونک اوّل- ۱۹/اسفند/۱۳۹۴

- زمانِ امتحان: ۳۰ دق. است،
- لطفاً نام، نامِ خانوادگی، و شمارهٔ دانش‌جوییِ خود را به طورِ خوانا روی سربرگِ دفترچهٔ آزمون بنویسید،
- لطفاً پاسخِ هر سؤال را در یک صفحهٔ مجزاّ، و جوابِ نهایی را داخلِ یک کادر بنویسید،
- به پاسخ‌هایی که در این شرایط صدق نکنند نمره‌ای تعلّق نخواهد گرفت!

۱- جزءِ حقیقیِ عددِ $(۱-\sqrt{۳}i)^{۷}$ چیست؟

ج: عددْ را در بازنماییِ قُطبی می‌نویسیم:

$$(۱-\sqrt{۳}i)^{۷} = (\sqrt{۳+۱})^{۷}(e^{-i\frac{\pi}{۳}})^{۷} = ۲^{۷}e^{-i\frac{۷\pi}{۳}} = ۱۲۸(\frac{۱}{۲} - i\frac{\sqrt{۳}}{۲})$$

در نتیجه، جزءِ حقیقی برابرِ با ۶۴.

۲- همهٔ ریشه‌های معادلهٔ $z^{۳} = -۸$ را برای متغیّرِ مختلطِ z بیابید.

ج:

$$(re^{i\theta})^{۳} = r^{۳}e^{۳i\theta} = ۸e^{-i\pi}$$

در نتیجه، $r = ۲$، و $۳\theta = -\pi + ۲k\pi$. در نتیجه، به عنوانِ جواب داریم:

$$۲e^{-i\frac{\pi}{۳}} = ۱ - \sqrt{۳}, ۲e^{i\frac{\pi}{۳}} = ۱ + \sqrt{۳}, ۲e^{-i\pi} = -۲$$

۳-مشتق‌های مختلطِ زیر را محاسبه کنید. در صورتی‌که مشتق وجود ندارد، صراحتاً اشاره کنید و عدمِ وجودِ مشتق را اثبات کنید.

الف)

$$\frac{d^{۲}}{dz^{۲}}\left(e^{(۱+۵i)z}\right) = (۱+۵i)^{۲}e^{(۱+۵i)z}$$

ب)

$$\frac{d}{dz}\left\{۲\left(iIm(z)\right)^{۲}+۲\left(Re(z)\right)^{۲}-\bar{z}^{۲}\right\}$$
$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{۱}{۲}\left(\bar{z}-z\right)^{۲}+\frac{۱}{۲}\left(\bar{z}+z\right)^{۲}-\bar{z}^{۲}\right\}$$
$$\frac{d}{dz}z^{۲}=۲z$$

که از این نکته استفاده کرده‌ایم که

$$Im(z)=\frac{\bar{z}-z}{۲i}, Re(z)=\frac{\bar{z}+z}{۲}$$

روش ِ دیگر این است که عبارت را به ازای جزء حقیقی و موهومی بازنویسی کنیم و مشاهده کنیم که نتیجهٔ نهایی برابر است با:

$$\frac{d}{dz}\left\{۲\left(iIm(z)\right)^{۲}+۲\left(Re(z)\right)^{۲}-\bar{z}^{۲}\right\}$$
$$\frac{d}{dz}\left\{-۲y^{۲}+۲x^{۲}-(x^{۲}-y^{۲}-۲ixy)\right\}$$
$$\frac{d}{dz}(x^{۲}-y^{۲}+۲ixy)=\frac{d}{dz}z^{۲}=۲z$$

ج) $\frac{d^{۲}}{dz^{۲}}\left(e^{-۲Re(z)}e^{-۲iIm(z)}\right)=\frac{d^{۲}}{dz^{۲}}\left(e^{-۲z}\right)=۴e^{-۲z}$

د) $\frac{d}{dz}\left(\frac{۱}{۱+|z|^{۲}}\right)$

توجّه کنید که تابعْ حقیقی-مقدار است، در نتیجه، جزء موهومی صفر است و شرایط ِ کُشی-ریمان نمی‌تواند ارضا شود مگر آن‌که جزء حقیقی نیز صفر باشد (که نیست). روش ِ دیگر آن است که مشاهده کنیم $z\bar{z}=|z|^{۲}$. در نتیجه، مشتقّ $\frac{d}{d\bar{z}}\left(\frac{۱}{۱+|z|^{۲}}\right)$ ناصفر است، که معادل با برآورده نشدن ِ ک-ر است. در نتیجه، تابعْ مشتق‌پذیر <u>نیست</u> .

۴- تصویر ِ رُبع ِ اوّل ِ صفحهٔ مختلط را تحت ِ نگاشت ِ $w=z^{۲}+i$ رسم کنید.

ج: مشاهده کنیم که نقطه‌ای با بازنمایی ِ قُطبی ِ $re^{i\theta}$ تحت ِ $z\to z^{۲}$ نگاشته می‌شود به $r^{۲}e^{i۲\theta}$، که به معنی دوبرابر شدن ِ زاویه است. در نتیجه، رُبع ِ اوّل به ربع ِ اوّل و دوّم نگاشته می‌شود، و با اضافه کردن ِ i یک انتقال به بالا داریم. در نتیجه، در صفحهٔ w تصویر ِ ربع ِ اوّل نقاط ِ نیم‌صفحهٔ $Im(w)>۱$ خواهد بود.

موفّق باشید