نگاشت‌های خطی (۴)

آنچه در جلسه قبل دیدیم تصویر به نسبت جامعی از عملکرد تابع‌های خطی روی زیرفضاهای مستوی می‌دهد. گزاره‌های ذکر شده اکثراً به طور مستقیم به زیرفضاهای خطی مربوط می‌شدند ولی نتیجه‌گیری درست در مورد زیرفضاهای مستوی دشوار نیست. مثلاً آخرین گزاره:

$$\dim(E) = \dim(f(E)) + \dim(E \cap \ker f) \qquad (۱)$$

برای زیرفضاهای خطی E برقرار است. اگر E' یک زیرفضای مستوی همبعد و موازی E باشد، یعنی $E' = p + E$، دیگر $E' \cap \ker f$ مطرح نیست، بلکه می‌دانیم که $\dim f(E') = \dim f(E)$ (تصویر زیرفضاهای مستوی موازی همبعد، موازی و همبعد است)، پس

$$\dim(E') = \dim f(E') + \dim(E \cap \ker f) \qquad (۲)$$

یعنی در اینجا بعد اشتراک انتقال‌یافتهٔ E' به $\underline{0}$ با هسته، تعیین‌کننده افت بعد E' در اثر عملکرد f است. با توجه به این تذکر، به مثال جلسهٔ قبل باز می‌گردیم.

مثال. تابع خطی $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ را با ماتریس $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ را بررسی می‌کنیم. هستهٔ این تابع خط راست $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{3}$ است. دیدیم که زیرفضاهای خطی دوبعدی شامل هسته به یک خط راست و زیرفضاهای خطی دوبعدی که فقط در $\underline{0}$ با هسته اشتراک دارند به تمامی صفحه $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ نگاشته می‌شوند. حال اگر F یک صفحهٔ دلخواه در $\mathbb{R}^3$ باشد (زیرفضای مستوی

دوبعدی)، برای تعیین بعد تصویر آن باید انتقال یافتهٔ آن به مبدأ، F°، را در نظر بگیریم. اگر F° شامل هسته باشد، یعنی F موازی هسته باشد، تصویر F یک خط راست می‌شود. در غیر این صورت، F° با هسته فقط در $\underline{\circ}$ مشترک است و تصویر آن دوبعدی می‌شود. اکنون وضعیت تصویر خطوط راست $\mathbb{R}^3$ را تحت اثر f بررسی می‌کنیم. اگر خط راست L به مبدأ منتقل شود تا خط راست L° به‌دست آید، L° یا برابر هسته است، که در این صورت L یک خط راست موازی هسته است و یا L° با هسته فقط در $\underline{\circ}$ مشترک است. در حالت اول تصویر L یک نقطه می‌شود و در حالت دوم تصویر آن یک خط راست است.

اکنون به ذکر چند نکته تکمیلی در مورد بحث جلسهٔ گذشته می‌پردازیم. پس تابع خطی

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

مورد نظر است.

(۱۴–۱) شرطی لازم و کافی برای یک به یک بودن f این است که $\ker(f) = \{\circ\}$. در این حالت لزوماً $n \leq m$.

اثبات. اگر عنصری $x \neq \underline{\circ}$ در هسته باشد، چون $f(x) = f(\underline{\circ}) = \underline{\circ}$، f یک به یک نیست. حال فرض کنید $\ker f = \{\underline{\circ}\}$ و $f(x_1) = f(x_2)$. چون f خطی است نتیجه می‌گیریم که $f(x_1 - x_2) = \underline{\circ}$، یعنی $x_1 - x_2 \in \ker(f)$، پس طبق فرض $x_1 = x_2$ و یک به یک بودن به اثبات می‌رسد. در این حالت $\dim(f(\mathbb{R}^n)) = n$، و چون $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^m$، نتیجه می‌گیریم که $n \leq m$. □

در فرمول (۱)، وقتی $E = \mathbb{R}^n$ داریم:

$$n = \dim(f(\mathbb{R}^n)) + \dim(\ker(f))$$

پوشا بودن f معادل این است که $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^m$، یعنی $n = m + \dim(\ker(f))$. بنابراین:

(۱۴—۲) شرطی لازم و کافی برای پوشا بودن f این است که $\dim(\ker(f)) = n - m$. در این حالت لزوماً $n \geq m$. □

برای تابع‌های $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، یعنی در حالت $m = n$، از (۱۴—۱) و (۱۴—۲) نتیجه می‌شود که:

(۱۴—۳) تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک است اگر و تنها اگر پوشا باشد. □

می‌دانیم که شرطی لازم و کافی برای وجود تابع معکوس (وارون) یک به یک و پوشا بودن تابع است. بدین ترتیب وقتی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک به یک (معادلاً پوشا) باشد، تابعی $f^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ وجود دارد که

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad , \quad f(f^{-1}(x)) = x$$

ادعا می‌کنیم که f^{-1} نیز خطی است. فرض کنید $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. چون f پوشا است، x_1 و x_2 وجود دارند که $y_1 = f(x_1)$ و $y_2 = f(x_2)$. بنابراین

$$\begin{aligned} f^{-1}(y_1 + y_2) &= f^{-1}(f(x_1) + f(x_2)) \\ &= f^{-1}(f(x_1 + x_2)) \quad \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= x_1 + x_2 \\ &= f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

به همین ترتیب اگر $y = f(x)$ و r یک عدد حقیقی باشد،

$$\begin{aligned} f^{-1}(ry) &= f^{-1}(rf(x)) \\ &= f^{-1}(f(rx)) \quad \text{چون } f \text{ خطی است} \\ &= rx \\ &= rf^{-1}(y) \end{aligned}$$

چون f^{-1} خطی است، به آن ماتریسی $n \times n$، B، منسوب می‌شود. اگر A ماتریس تابع خطی f باشد، رابطهٔ B را با A بررسی می‌کنیم. داریم $f \circ f^{-1} = 1_{\mathbb{R}^n}$ و $f^{-1} \circ f = 1_{\mathbb{R}^n}$ که در آن $1_{\mathbb{R}^n}$ تابع همانی

$\mathbb{R}^n$ است. از آنجا که ماتریس $1_{\mathbb{R}^n}$ برابر I_n است و ترکیب تابع‌های خطی متناظر با حاصل‌ضرب ماتریس‌های مربوط است، داریم:

$$BA = I_n \quad , \quad AB = I_n$$

چنین ماتریس B وارون یا معکوس ماتریس A خوانده می‌شود و معمولاً آن را به A^{-1} نمایش می‌دهیم.

مثال زیر نشان می‌دهد چگونه می‌توان بعضی مسائل هندسی را به بحث در مورد جواب‌های یک دستگاه معادلهٔ درجه یک تبدیل کرد و سپس از مطالب فوق در حل مسأله یاری جست.

مثال. فرض کنید E_1 و E_2 دو صفحه (زیرفضای مستوی دوبعدی) در $\mathbb{R}^4$ هستند. نشان می‌دهیم:

(الف) اگر $E_1 \cap E_2$ یک تک نقطه باشد و E'_1 یک صفحهٔ موازی E_1 و E'_2 یک صفحهٔ موازی E_2 باشد، آنگاه $E'_1 \cap E'_2$ نیز یک تک نقطه است.

(ب) اگر $E_1 \cap E_2$ یک خط راست باشد، صفحه‌ای E'_1 موازی E_1 و صفحه‌ای E'_2 موازی E_2، وجود دارند که $E'_1 \cap E'_2$ تهی است.

فرض کنید E_1 صفحهٔ گذرا از p به موازات A_1 و A_2 باشد، $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی، و E_2 صفحه گذرا از q به موازات B_1 و B_2، و $\{B_1, B_2\}$ مستقل خطی. این که E_1 و E_2 دقیقاً یک نقطهٔ مشترک دارند بدین صورت قابل بیان است که چهارتایی منحصر به فردی (s_1, s_2, t_1, t_2) از اعداد حقیقی وجود دارد که:

$$p + s_1 A_1 + s_2 A_2 = q + t_1 B_1 + t_2 B_2 \tag{3}$$

حال p, q, A_1, A_2, B_1, B_2 همه عناصر $\mathbb{R}^4$، یعنی چهارتایی هستند. می‌نویسیم $p = (p_1, \ldots, p_4)$، $q = (q_1, \ldots, q_4)$، $A_1 = (a_{11}, a_{21}, a_{31}, a_{41})$، $A_2 = (a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42})$، $B_1 = (b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41})$، $B_2 = (b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42})$، پس اگر مؤلفه‌های اول تا چهارم دو طرف

(۳) را برابر قرار دهیم حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} p_1 + s_1 a_{11} + s_2 a_{12} = q_1 + t_1 b_{11} + t_2 b_{12} \\ p_2 + s_1 a_{21} + s_2 a_{22} = q_2 + t_1 b_{21} + t_2 b_{22} \\ p_3 + s_1 a_{31} + s_2 a_{32} = q_3 + t_1 b_{31} + t_2 b_{32} \\ p_4 + s_1 a_{41} + s_2 a_{42} = q_4 + t_1 b_{41} + t_2 b_{42} \end{cases} \tag{۴}$$

با انتقال جملات دارای s_1, s_2, t_1, t_2 به سمت چپ و سایر جملات به سمت راست، دستگاه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & -b_{11} & -b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & -b_{21} & -b_{22} \\ a_{31} & a_{32} & -b_{31} & -b_{32} \\ a_{41} & a_{42} & -b_{41} & -b_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \\ q_4 - p_4 \end{bmatrix} \tag{۵}$$

ماتریس ۴×۴ سمت چپ یک تابع خطی $f : \mathbb{R}^۴ \longrightarrow \mathbb{R}^۴$ تعریف می‌کند. اینکه E_1 و E_2 فقط یک نقطهٔ اشتراک داشته باشند بدین صورت قابل بیان است که یک و تنها یک نقطهٔ $\mathbb{R}^۴$ به نقطهٔ $(q-p)$ نگاشته می‌شود، مجموعهٔ تراز، $f^{-1}(q-p)$ تک عضوی است. می‌دانیم که همهٔ مجموعه‌های تراز ناتهی از انتقال هسته به‌دست می‌آیند و با هم موازی هستند. پس در این حالت هسته برابر $\{0\}$ است و در نتیجه f یک به یک و پوشا است. حال اگر به جای E_1 و E_2، دو زیرفضای موازی جایگزین کنیم، فقط طرف راست (۵) عوض می‌شود، ولی از آنجا که f یک به یک و پوشا است، مجدداً جواب منحصر به فردی (s_1, s_2, t_1, t_2) برای دستگاه به‌دست می‌آید، یعنی اشتراک دو زیرفضای موازی نیز یک تک نقطه است.

اکنون حالتی را در نظر بگیرید $E_1 \cap E_2$ یک خط راست است. به زبان تابع‌های خطی، این مطلب را می‌توان به این صورت بیان کرد که مجموعه تراز $f^{-1}(q-p)$ یک بعدی است. نتیجه می‌شود که هستهٔ تابع خطی $f : \mathbb{R}^۴ \longrightarrow \mathbb{R}^۴$ یک بعدی است. بنابراین f یک به یک نیست و طبق (۱۴—۳) پوشا نیست. بنابراین طرف راست (۵) را می‌توان طوری اختیار کرد که مجموعهٔ تراز منسوب به آن تهی باشد. مثلاً با ثابت نگاهداشتن p و تغییر مناسب q، می‌توان به چنین نقطه‌ای رسید. نتیجه این که با

انتقال موازی مناسب E_1 و E_2 می‌توان به دو صفحهٔ غیر متقاطع رسید.

مثال بالا به خوبی نشان می‌دهد که بسیاری سؤال‌های مربوط به دستگاه‌های معادلات خطی را اکنون می‌توان به کمک اطلاعاتی که در مورد تابع‌های خطی کسب کرده‌ایم جواب داد. دستگاه کلی m معادلهٔ n مجهولی درجه یک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{6}$$

یا به طور خلاصه:

$$A|x\rangle = |b\rangle \tag{7}$$

که در آن $A = [a_{ij}]$. دستگاهی که طرف چپ آن مانند بالا و طرف راست از صفر تشکیل شده باشد، دستگاه همگن (یا متجانس) وابسته به (۶) یا (۷) می‌نامند:

$$A|x\rangle = |\underline{0}\rangle \tag{8}$$

جدول زیر رابطهٔ بین جبر حل دستگاه‌های معادلات بالا و هندسهٔ تابع‌های خطی را خلاصه می‌کند:

جبر	هندسه
حل (۶) برای b داده شده	یافتن مجموعهٔ تراز منسوب b
وجود جواب به‌ازای b داده شده	ناتهی بودن مجموعهٔ تراز منسوب به b
وجود جواب به‌ازای هر b	پوشا بودن تابع خطی f
یگانگی جواب در صورت وجود	هسته $= \{0\}$
حل دستگاه همگن	یافتن هسته

چند نمونه از احکام جبری را که اکنون می‌توان با توسل به هندسهٔ تابع‌های خطی جواب داد در زیر می‌آوریم. مثال‌های دیگری در تمرین‌ها آمده‌اند.

(۱۴–۴) اگر تعداد معادلات بیش از تعداد مجهول‌ها باشد، می‌توان b را طوری اختیار کرد که دستگاه جواب نداشته باشد.

اثبات. این حالت $m > n$ است که طبق ۱۴–۲ تابع خطی مربوط پوشا نیست، یعنی $b \in \mathbb{R}^m$ وجود دارد که $f^{-1}(b)$ تهی است. $\square$

(۱۴–۵) اگر $\overline{x} = (\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ یک جواب (٦) باشد، همهٔ جواب‌های (٦) عبارتند از $x + \overline{x}$ که در آن x یک جواب دستگاه همگن متناظر است.

اثبات. داریم $f(\overline{x}) = b$. اگر x یک جواب دستگاه همگن باشد، یعنی x در هستهٔ f است، پس $f(x+\overline{x}) = f(x) + f(\overline{x})$. بالعکس فرض کنید $\overline{\overline{x}}$ جواب دیگری از (٦) باشد، آنگاه

$$f(\overline{\overline{x}} - \overline{x}) = f(\overline{\overline{x}}) - f(\overline{x}) = b - b = \underline{\circ}$$

پس $\overline{x} - \overline{\overline{x}}$ در هسته است و می‌توان نوشت $\overline{\overline{x}} = (\overline{\overline{x}} - \overline{x}) + \overline{x}$. $\square$

حالت مهم $m = n$ (تعداد مجهول = تعداد معادله) را در نظر بگیرید. دیدیم که در این حالت شرایط زیر معادل هستند: f یک به یک، f پوشا، f وارون‌پذیر، هسته $f = \{\circ\}$. در این حالت، ماتریس مربوط، A، نیز وارون‌پذیر است و با ضرب کردن دو طرف (۷) در A^{-1} از سمت چپ، جواب (منحصر به فرد) دستگاه به‌دست می‌آید:

$$|x\rangle = A^{-1}|b\rangle \tag{۹}$$