نگاشت‌های خطی (۳)

با مقدمات جلسه قبل اکنون آماده هستیم بررسی عمومی توابع خطی

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \tag{۱}$$

را آغاز کنیم. آنچه در زیر خواهد آمد در رابطه با تابع خطی (۱) خواهد بود.

(۱۳—۱) تحت اثر f، $\underline{\circ} \in \mathbb{R}^n$ به $\underline{\circ} \in \mathbb{R}^m$ نگاشته می‌شود.

اثبات. می‌نویسیم $\underline{\circ} = \circ \cdot x$ که x عنصری دلخواه از $\mathbb{R}^n$ است. داریم:

$$f(\underline{\circ}) = f(\circ \cdot x) = \circ \cdot f(x) = \underline{\circ}$$

(۱۳—۲) تحت اثر f، تصویر هر زیرفضای خطی (به ترتیب هر زیرفضای مستوی) یک زیرفضای خطی (به ترتیب یک زیرفضای مستوی) است.

اثبات. نخست حالت یک زیرفضای خطی E را در نظر بگیرید، باید ثابت کنیم $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. با استفاده از ضابطه (۱۲—۱) جلسه قبل عمل می‌کنیم. اگر y و y' دو عنصر $f(E)$ باشند، داریم $y = f(x)$ و $y' = f(x')$ برای x و x' مناسب در

E. پس

$$y+y=f(x)+f(x')=f(x+x')$$

چون $x,x' \in E$، طبق ضابطهٔ (۱۲—۳) جلسهٔ قبل، $x+x' \in E$، پس $y+y' \in f(E)$ به همین ترتیب اگر $r \in \mathbb{R}$،

$$\begin{aligned} ry &= rf(x) \\ &= f(rx) \qquad \text{طبق } (۱۲—۱) \end{aligned}$$

و $rx \in E$ طبق ۱۲—۳، پس $ry \in f(E)$. بدین ترتیب ثابت کرده‌ایم که تصویر یک زیرفضای‌خطی، خود یک زیرفضای خطی است. حال هر زیرفضای مستوی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a+E=\{a+x \mid x \in E\}$$

که E یک زیرفضای خطی و a یک عنصر داده شده از E است. بنابراین هر عنصر تصویر به شکل $f(a+x)=f(a)+f(x)$ می‌باشد. چون $f(x) \in f(E)$ و در بالا دیدیم که $f(E)$ یک زیرفضای خطی است، تصویر زیرفضای مستوی بالا برابر انتقال‌یافتهٔ $f(E)$ توسط عنصر ثابت $f(a)$ است، پس مستوی است. □

توجه کنید که در استدلال بالا، در صورتی که $f(a) \in f(E)$، تصویر زیرفضای مستوی یک زیرفضای‌خطی خواهد بود که تناقض نیست زیرا که زیرفضاهای خطی خود نوعی زیرفضای مستوی هستند. ضمناً اگر دو زیرفضای موازی و همبعد $a+E$ و $b+E$ در $\mathbb{R}^n$ را در نظر بگیریم، طبق آنچه در بالا مشاهده شد، تصویر آنها به ترتیب $f(a)+f(E)$ و $f(b)+f(E)$ خواهد بود، یعنی دو زیرفضای موازی (یا منطبق) از $\mathbb{R}^m$:

(۱۳—۳) اگر $E_۱$ و $E_۲$ دو زیرفضای مستوی همبعد و موازی از $\mathbb{R}^n$ باشند، $f(E_۱)$ و $f(E_۲)$ همبعد و موازی (یا منطبق) خواهند بود. □

(۴−۱۸) مثال. تابع خطی $f:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}^۳$ را که با ماتریس $\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & -۱ \\ ۵ & ۱ & -۲ \end{bmatrix}$ مشخص می‌شود در نظر می‌گیریم. تصویر هر نقطهٔ (x,y,z) تحت f را به (X,Y,Z) نمایش می‌دهیم: $(X,Y,Z)=f(x,y,z)$. داریم:

$$X=-x+y \quad , \quad Y=۲x+y-z \quad , \quad Z=۵x+y-۲z \qquad (۲)$$

توجه کنید که $Z=۲Y-X$، پس همهٔ نقاط $\mathbb{R}^۳$ به یک صفحهٔ گذرا از $\underline{\circ}$ (زیرفضای خطی دوبعدی)، یعنی $x_۱-۲x_۲+x_۳=۰$ نگاشته می‌شوند. حال اثر f را بر چند صفحه خاص در نظر می‌گیریم. نخست صفحهٔ مختصاتی xy، متشکل از نقاط $(x,y,۰)$ را در نظر بگیرید. طبق (۲) داریم:

$$f(x,y,۰)=(-x+y,۲x+y,۵x+y)$$

ادعا می‌کنیم هر نقطه صفحهٔ $x_۱-۲x_۲+x_۳=۰$ در تصویر صفحهٔ مختصاتی xy قرار دارد. اگر $(x_۱,x_۲,-x_۱+۲x_۲)$ یک چنین نقطه‌ای باشد، باید نشان دهیم دستگاه زیر دارای جواب برحسب x و y است:

$$\begin{cases} -x+y=x_۱ \\ ۲x+y=x_۲ \\ ۵x+y=-x_۱+۲x_۲ \end{cases}$$

دو معادلهٔ اول جواب منحصر به فرد $x=\frac{-x_۱+x_۲}{۳}$، $y=\frac{۲x_۱+x_۲}{۳}$ را دارند که با جایگزینی ملاحظه می‌کنیم در معادله سوم نیز صدق می‌کند. پس در واقع صفحهٔ مختصاتی xy به طور یک به یک بر صفحه تصویر همهٔ $\mathbb{R}^۳$ نگاشته می‌شود. محاسبهٔ مشابه با صفحات مختصاتی yz و zx نشان خواهد داد که هر یک از این صفحات نیز به طور یک به یک بر $f(\mathbb{R}^۳)$ نگاشته می‌شود. حال تصویر صفحهٔ $x_۱+۲x_۲-x_۳=۰$ را تحت f بررسی می‌کنیم. نقاط این صفحه به شکل $(x,y,x+۲y)$ هستند. طبق (۲) داریم:

$$f(x,y,x+۲y)=(-x+y,x-y,۳x-۳y)$$

ملاحظه می‌کنیم که هر نقطهٔ تصویر مضربی از سه‌تایی $(-۱, ۱, ۳)$ است، یعنی تصویر، خط راست

$$\frac{x}{-۱} = \frac{y}{۱} = \frac{z}{۳}$$

می‌باشد. بدین ترتیب تصویر صفحاتی که تاکنون بررسی کردیم، بعضی یک صفحه (دوبعدی) و بعضی یک خط راست (یک بعدی) می‌شوند. سؤالی که مطرح می‌شود این است که چه قانونی بر تعیین بعد تصویر حاکم است؟ بررسی‌های بعدی این موضوع را روشن خواهد ساخت.

برای تابع خطی (۱)، هستهٔ f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم و به $\ker(f)$ نمایش می‌دهیم:

$$\ker(f) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = \underline{۰}\} \qquad (۳)$$

(۱۳—۴) $\ker(f)$ **یک زیرفضای خطی** $\mathbb{R}^n$ **است.**

اثبات. اگر x و x' در $\ker(f)$ باشند، باید نشان دهیم $x + x'$ در $\ker(f)$ است، و اگر به علاوه $r \in \mathbb{R}$، باید نشان دهیم rx نیز در $\ker(f)$ است:

$$\begin{aligned} f(x+x') &= f(x) + f(x') \quad \text{طبق ۱۲—۱} \\ &= \underline{۰} + \underline{۰} = \underline{۰} \\ f(rx) &= rf(x) \quad \text{طبق ۱۲—۱} \\ &= r\underline{۰} = \underline{۰} \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. □

حال طبق (۱۳—۳)، اگر L از انتقال هستهٔ f با یک عضو ثابت $\mathbb{R}^n$ به‌دست آید، تصویر L تحت f موازی و همبعد تصویر هسته تحت f است، ولی هسته به تک نقطهٔ $\{۰\}$ نگاشته می‌شود، بنابراین تصویر هر L یک تک نقطه خواهد بود:

(۱۳—۵) اگر K هستهٔ f باشد و $a \in \mathbb{R}^n$، تصویر $a+K$ تحت f تک نقطهٔ $\{f(a)\}$ است. بالعکس، اگر b نقطه‌ای در $\mathbb{R}^m$ باشد، $f^{-1}(b)$ (= مجموعهٔ تراز منسوب به b = مجموعهٔ نقاطی که تحت f به b نگاشته می‌شوند) یا تهی است یا یک زیرفضای مستوی همبعد و موازی K است.

اثبات. قسمت اول حکم را در بالا توضیح دادیم و برای قسمت دوم فرض کنید $f^{-1}(b)$ تهی نباشد، آنگاه عنصری a در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که $f(a) = b$. نشان می‌دهیم:

$$f^{-1}(a) = a + K$$

نخست برای هر عنصر $a+K$، یعنی عنصر به شکل $a+x$ که $x \in K$، داریم:

$$\begin{aligned} f(a+x) &= f(a) + f(x) \\ &= f(a) \\ &= b \end{aligned}$$

بالعکس اگر $a' \in f^{-1}(b)$، می‌نویسیم:

$$a' = a + (a' - a) \tag{۴}$$

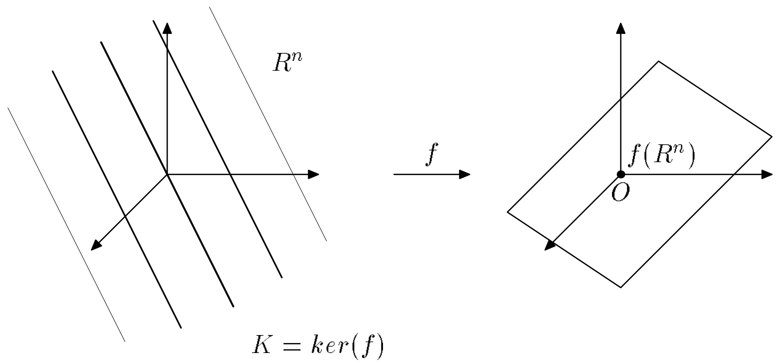
$a' - a$ در هسته است زیرا که

$$\begin{aligned} f(a'-a) &= f(a') - f(a) \\ &= b - b \\ &= \underline{\circ} \end{aligned}$$

بنابراین (۴) نشان می‌دهد که هر عضو $f^{-1}(b)$ مجموع a با یک عنصر هسته است و اثبات حکم کامل می‌شود. □

نتیجه‌های اخیر تصویری ساده و به لحاظی کامل از عملکرد یک تابع خطی $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ارائه می‌کند. طبق (۱۳—۲)، کل $\mathbb{R}^n$ به یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ نگاشته می‌شود، هسته به نقطهٔ $\underline{\circ}$ و

زیرفضاهای موازی و همبعد هسته هر یک به تمامی به یک نقطهٔ تصویر فرستاده می‌شوند. در واقع از هر نقطهٔ $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای منحصر به فرد همبعد و موازی K می‌گذرد که همهٔ نقاط آن به یک



شکل ۱

نقطه در $f(\mathbb{R}^n)$ نگاشته می‌شوند. می‌توان این توصیف عملکرد تابع خطی را این گونه تجسم کرد که در اثر عملکرد تابع خطی هر یک از زیرفضاهای مستوی موازی و همبعد هسته به یک نقطه در $\mathbb{R}^m$ منقبض می‌شود و حاصل یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^m$ است. به نظر می‌آید که در اثر انقباض این زیرفضاهای مستوی به تک نقطه‌ها، باید تصویر $\mathbb{R}^n$ تحت f، بعدی برابر $(n-k)$ داشته باشد که k بعد هسته است. در واقع حکم کلی زیر برقرار است:

(۱۳–۶) فرض کنید E یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت:

$$\dim E = \dim f(E) + \dim(E \cap \ker(f)) \qquad (۵)$$

(در اینجا dim مخفف dimension به معنای بُعد است)

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که اشتراک هر دو زیرفضای خطی از $\mathbb{R}^n$، یک زیرفضای خطی است، بنابراین $E \cap \ker(f)$ یک زیرفضای خطی است و بُعد آن معنی دارد. برای مشاهدهٔ این امر فرض کنید $E_۱$ و $E_۲$ دو زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ باشند. اگر x و x' هر دو در $E_۱ \cap E_۲$ باشند، چون هر دو در $E_۱$

و هر دو در E_2 هستند، داریم $x + x' \in E_1$ و $x + x' \in E_2$، پس $x + x' \in E_1 \cap E_2$. همچنین اگر $x \in E \cap E'$ و $r \in \mathbb{R}$، داریم $rx \in E_1$ و $rx \in E_2$، پس $rx \in E_1 \cap E_2$.

حال به اثبات حکم می‌پردازیم. فرض کنید $\dim(E \cap \ker(f)) = l$. در این صورت مجموعهٔ مستقل خطی $\{A_1, \ldots, A_l\}$ از عناصر $E \cap \ker(f)$ وجود دارد که پایه برای این زیرفضاست، یعنی $E \cap \ker(f) = \langle A_1, \ldots, A_l \rangle$. اگر $E \cap \ker(f) = E$، $E \subset \ker(f)$، آنگاه لزوماً همهٔ نقاط E به صفر نگاشته می‌شوند، $\dim f(E) = 0$، و فرمول (۵) برقرار است. اگر $E \cap \ker(f)$ همهٔ E نباشد، عنصری A_{l+1} در E وجود دارد که ترکیبی خطی از $A_1, \ldots, A_l$ نیست. مجموعهٔ $\{A_1, \ldots, A_{l+1}\}$ مستقل خطی است (دقیقاً چرا؟). اگر $E = \langle A_1, \ldots, A_{l+1} \rangle$، داریم $\dim E = l + 1$ و $f(E)$ از مضارب $f(A_{l+1})$ تشکیل شده است زیرا که

$$
\begin{aligned}
f(t_1 A_1 + \cdots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^{l} t_i f(A_i) + t_{l+1} f(A_{l+1}) \\
&= t_{l+1} f(A_{l+1})
\end{aligned}
$$

از طرفی دیگر $f(A_{l+1}) \neq \underline{0}$ چون $A_{l+1} \notin \ker(f)$. بنابراین $\dim f(E) = 1$ و مجدداً فرمول (۵) برقرار است. حال اگر $\langle A_1, \ldots, A_{l+1} \rangle$ همهٔ E نباشد، عنصری A_{l+2} از E به مجموعهٔ $\{A_1, \ldots, A_{l+1}\}$ می‌افزاییم که ترکیبی خطی از $A_1, \ldots, A_{l+1}$ نباشد و استدلال بالا را تکرار می‌کنیم. به طور کلی، اگر $\dim E = k$، در $k - l$ گام به مجموعهٔ مستقل خطی k عضوی $\{A_1, \ldots, A_l, A_{l+1}, \ldots, A_k\}$ می‌رسیم که لزوماً یک پایه برای E است. حال بعد $f(E)$ را محاسبه می‌کنیم. برای هر عضو x از E داریم:

$$
\begin{aligned}
x &= t_1 A_1 + \cdots + t_l A_l + t_{l+1} A_{l+1} + \cdots + t_k A_k \\
f(x) &= t_1 f(A_1) + \cdots + t_l f(A_l) + t_{l+1} f(A_{l+1}) + \cdots + t_k f(A_k) \qquad \text{بنابر ۱۲–۱} \\
&= t_{l+1} f(A_{l+1}) + \cdots + t_k f(A_k) \qquad (\text{چون } A_i \in \ker(f) \text{ برای } i = 1, \ldots l)
\end{aligned}
$$

بنابراین هر عضو تصویر E یک ترکیب خطی از $f(A_{l+1}), \ldots, f(A_k)$ است. اگر ثابت کنیم مجموعهٔ $\{f(A_{l+1}), \ldots, f(A_k)\}$ مستقل خطی است، نتیجه می‌شود که $\dim(f(E)) = k - l$ و رابطهٔ (۵) به

اثبات می‌رسد. برای اثبات این واقعیت فرض کنید مجموعهٔ فوق مستقل خطی نباشد، یعنی اعداد حقیقی $c_{l+1}, \dots, c_k$ وجود داشته باشند که:

$$c_{l+1} f(A_{l+1}) + \cdots + c_k f(A_k) = \underline{0}$$

$$f(c_{l+1} A_{l+1} + \cdots + c_k A_k) = \underline{0}$$

این نشان می‌دهد که $c_{l+1}A_{l+1} + \cdots + c_k A_k$ عضوی از هستهٔ f است و در ضمن چون $A_{l+1}, \dots, A_k \in E$، $c_{l+1}A_{l+1} + \cdots + c_k A_k$، عضو $E \cap \ker f$ است. بنابراین اعداد حقیقی $c_1, \dots, c_l$ وجود دارند که:

$$c_{l+1}A_{l+1} + \cdots + c_k A_k = c_1 A_1 + \cdots + c_l A_l$$

$$c_1 A_1 + \cdots + c_l A_l - c_{l+1}A_{l+1} - \cdots - c_k A_k = \underline{0}$$

با توجه به استقلال خطی $\{A_1, \dots, A_k\}$ همهٔ ضرایب باید صفر باشند، بالاخص $c_{l+1} = \cdots = c_k = 0$. و اثبات استقلال خطی $\{f(A_{l+1}), \dots, f(A_k)\}$ و حکم (۵) به اتمام می‌رسد. $\square$

با توجه به ۱۳—٦، اکنون می‌توانیم با نگاهی مجدد به مثال ۱۸—۴، این مطلب که تصاویر صفحات گوناگون تحت تابع خطی آن مثال، بعضی دوبعدی و بعضی یک بعدی بودند به طور کامل تجزیه و تحلیل کنیم. برای این کار نخست هستهٔ f در مثال ۱۸—۴ را پیدا می‌کنیم. باید داشته باشیم:

$$A|x\rangle = |\underline{0}\rangle$$

یا $(-x_1 + x_2, 2x_1 + x_2 - x_3, 5x_1 + x_2 - 2x_3) = (0, 0, 0)$. بنابراین $x_2 = x_1$ و $x_3 = 3x_1$. نتیجه این که هستهٔ f عبارت است از خط راست:

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{1} = \frac{x_3}{3} \tag{٦}$$

حال اگر E یک زیرفضای خطی دوبعدی $\mathbb{R}^3$ باشد، بعد تصویر E طبق ۱۸—٦ برابر $2 - l$ است که l بعد اشتراک E با هسته است. دو امکان وجود دارد، یا اشتراک E و هسته فقط $\{\underline{0}\}$ است که در این

صورت $l = ۰$ و تصویر E دوبعدی است، و یا اشتراک E و هسته یک بعدی است، یعنی هسته به تمامی در E قرار دارد، که در این صورت $l = ۱$ و تصویر یک بعدی است. در مثال ۱۸−۴، هر یک از صفحات مختصاتی با هسته (یعنی خط راست (٦)) فقط در $\underline{۰}$ اشتراک دارند، بنابراین تصویر هر یک، دوبعدی است. ولی صفحهٔ $x_۱ + ۲x_۲ - x_۳ = ۰$ شامل خط راست (٦) است، یعنی برای آن $l = ۱$، و در نتیجه تصویر آن تحت f، یک بعدی می‌باشد.