نگاشت‌های خطی (۲)

مثال‌هایی که از تابع‌های خطی در جلسهٔ گذشته ارائه کردیم از تنوع قابل ملاحظه‌ای برخوردار بود و ممکن است این احساس را ایجاد کرده باشد که وجه تشابه چندانی میان تابع‌های خطی موجود نیست. در چند جلسهٔ آینده، برعکس، خواهیم دید که تابع‌های خطی از بعضی وجوه شباهت‌های فوق‌العاده‌ای به هم دارند. بررسی این خواص دست‌آوردهای مهمی برای ما خواهد داشت. یکی از این دستاوردها امکان بحث کامل در مورد وجود و نظام جواب‌های یک دستگاه m معادلهٔ n مجهولی درجه اول است که به آن خواهیم پرداخت. دستاوردی دیگر زمینه‌سازی برای بررسی توابع غیرخطی در باقیماندهٔ درس است که در آنجا، آنچه در چند جلسهٔ آینده در مورد تابع‌های خطی خواهیم دید رهنمودی مهم خواهد بود. در این جلسه زمینه را برای مطالعه تابع‌های خطی فراهم می‌کنیم. کار عمدهٔ ما بازبینی بعضی تعاریف و مفاهیمی خواهد بود که در جلسات قبل مطرح شده‌اند و اکنون آنها را به صورتی قابل استفاده در می‌آوریم.

(۱۲—۱) گزاره. تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی است در صورتی که واجد دو شرط زیر باشد:

الف) برای هر x و x' در $\mathbb{R}^n$، $f(x+x') = f(x) + f(x')$.

ب) برای هر x در $\mathbb{R}^n$ و هر عدد حقیقی r، $f(rx) = rf(x)$.

اثبات. اگر $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ خطی باشد، ماتریس متناظر با آن، A، را در نظر می‌گیریم. عملکرد f روی عناصر x از $\mathbb{R}^n$ به صورت:

$$|f(x)\rangle = A|x\rangle \tag{۱}$$

است. بنابراین:

$$\begin{aligned} |f(x+x')\rangle &= A|x+x'\rangle \\ &= A|x\rangle + A|x'\rangle && \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= |f'(x)\rangle + |f(x')\rangle \end{aligned}$$

پس (الف) برقرار است. همین طور:

$$\begin{aligned} |f(rx)\rangle &= A|rx\rangle \\ &= r(A|x\rangle) \end{aligned}$$

و (ب) برقرار است. بالعکس فرض کنید شرط‌های (الف) و (ب) برای تابع $f:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ برقرارند. باید نشان دهیم ماتریسی $m\times n$، A، وجود دارد که برای هر $x\in\mathbb{R}^n$، داریم $|f(x)\rangle = A|x\rangle$. از بحث پایان جلسهٔ قبل به یاد می‌آوریم که ستون‌های ماتریس یک تابع خطی به ترتیب از مؤلفه‌های $f(e_1)$ تا $f(e_n)$ تشکیل می‌شوند، بنابراین نامزد واضحی برای ماتریس مورد نظر A وجود دارد که باید در مورد آن ادعای $|f(x)\rangle = A|x\rangle$ را ثابت کرد. ماتریس A را این گونه در نظر می‌گیریم که ستون jـ ام آن، برای $j=1,\dots,n$، برابر $|f(e_j)\rangle$ باشد. برای $x=(x_1,\dots,x_n)=x_1e_1+\cdots+x_ne_n$ داریم:

$$\begin{aligned} |f(x)\rangle &= |f(x_1e_1+\cdots+x_ne_n)\rangle \\ &= |x_1f(e_1)+\cdots+x_nf(e_n)\rangle && \text{طبق (الف) و (ب)} \\ &= |x_1f(e_1)\rangle+\cdots+|x_nf(e_n)\rangle \\ &= x_1|f(e_1)\rangle+\cdots+x_n|f(e_n)\rangle \\ &= x_1(A|e_1\rangle)+\cdots+x_n(A|e_n\rangle) \\ &= A|x_1e_1\rangle+\cdots+A|x_ne_n\rangle \\ &= A|x_1e_1+\cdots+x_ne_n\rangle && \text{قانون پخشی ضرب ماتریسی} \\ &= A|x\rangle \end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

بدین ترتیب از این پس برای استفاده از خطی بودن یک تابع به‌کارگیری دو خاصیت (الف) و (ب) بالا کافی است و نیازی به نوشتن صریح ماتریس مربوط نیست.

در جلسهٔ قبل ضرب ماتریسی را تعریف کردیم. این تعریف در نظر اول دور از ذهن و فاقد انگیزهٔ مشخص به نظر می‌رسد، ولی گزاره زیر نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب دو ماتریس در واقع بیانگر ترکیب تابع‌های خطی متناظر است.

(۱۲—۲) گزاره. **تابع‌های خطی** $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ **با ماتریس** A **و** $g:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^p$ **با ماتریس** B داده شده‌اند. در این صورت ماتریس $g\circ f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^p$ برابر BA است.

اثبات. مقدمتاً توجه کنید که $g\circ f$ در واقع یک تابع خطی است که این مطلب را می‌توان با استفاده از گزاره ۱۲—۱ ملاحظه کرد:

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x+x') &= g(f(x+x'))\\ &= g(f(x)+f(x')) && \text{چون } f \text{ خطی است}\\ &= g(f(x))+g(f(x')) && \text{چون } g \text{ خطی است}\\ &= (g\circ f)(x)+(g\circ f)(x')\end{aligned}$$

به همین روش

$$\begin{aligned}(g\circ f)(rx) &= g(f(rx))\\ &= g(rf(x)) && \text{چون } f \text{ خطی است}\\ &= rg(f(x)) && \text{چون } g \text{ خطی است}\\ &= r(g\circ f)(x)\end{aligned}$$

حال به اثبات ادعای گزاره می‌پردازیم. ماتریس $g \circ f$ را به C نمایش می‌دهیم. داریم:

$$\begin{aligned} C|x\rangle &= |(g \circ f)(x)\rangle \\ &= |g(f(x))\rangle \\ &= B|f(x)\rangle \\ &= B|(A|x\rangle)\rangle \\ &= BA|x\rangle \qquad \text{بنابر ویژگی شرکت‌پذیری ضرب ماتریسی} \end{aligned}$$

پس $C|x\rangle = BA|x\rangle$. اگر حاصل‌ضرب دو ماتریس $p \times n$ در هر ستون n تایی برابر باشد، دو ماتریس برابرند زیرا که با گرفتن $x = e_j$، $j = ۱, \ldots, n$، کلیهٔ ستون‌های ماتریس‌ها به‌دست می‌آیند. □

بالاخره ضابطهٔ ساده‌ای برای تحقیق کردن این مطلب که آیا یک زیرمجموعهٔ E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی است ارائه می‌کنیم.

(۱۲—۳) گزاره. زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ یک زیرفضای خطی $\mathbb{R}^n$ است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

الف) هرگاه x و x' در E باشند، آنگاه $x + x'$ نیز در E است.

ب) هرگاه x در E باشد و $r \in \mathbb{R}$، آنگاه rx نیز در E است.

اثبات. نخست نشان می‌دهیم هر زیرفضای خطی E از $\mathbb{R}^n$ از دو ویژگی فوق برخوردار است. زیرفضای خطی E را به شکل $\langle A_۱, \ldots, A_k\rangle$، یعنی مجموعهٔ ترکیب‌های خطی $\{A_۱, \ldots, A_k\}$، که یک مجموعهٔ مستقل خطی عناصر E است، در نظر می‌گیریم. پس x و x' به شکل $x = t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k$ و $x' = t'_۱A_۱ + \cdots + t'_kA_k$ هستند. بنابراین داریم:

$$x + x' = (t_۱ + t'_۱)A_۱ + \cdots + (t_k + t'_k)A_k$$

و $x, x' \in E$. همین طور:

$$r(t_۱A_۱ + \cdots + t_kA_k) = (rt_۱)A_۱ + \cdots + (rt_k)A_k$$

و $rx \in E$.

بالعکس فرض کنید زیرمجموعهٔ ناتهی E از $\mathbb{R}^n$ واجد شرط‌های (الف) و (ب) باشد، نشان می‌دهیم E یک زیرفضای خطی است، یعنی برابر مجموعهٔ ترکیب‌های خطی یک مجموعهٔ مستقل خطی می‌باشد. قطعاً داریم $\underline{0} \in E$ زیرا که E ناتهی است یعنی عنصری x در E هست، پس طبق (ب) $0 \cdot x = \underline{0}$ در E قرار دارد.

اگر E عضو دیگری نداشته باشد، یعنی $E = \{\underline{0}\}$ که طبق قرارداد E یگانه زیرفضای خطی صفر بعدی $\mathbb{R}^n$ است. اگر عضو دیگری $A_1 \neq \underline{0}$ در E باشد، طبق (ب)، همه مضارب A_1، یعنی rA_1 ها، $r \in \mathbb{R}$، در E هستند. حال اگر عضو دیگری در E نباشد، یعنی $E = \langle A_1 \rangle$، E یک زیرفضای خطی یک بعدی است. در غیر این صورت عنصری A_2 در E وجود دارد که مضرب A_1 نیست، و در نتیجه $\{A_1, A_2\}$ مستقل خطی است. طبق (الف) و (ب)، همه ترکیب‌های خطی A_1 و A_2 در E قرار دارند، یعنی $\langle A_1, A_2 \rangle \subset E$.

اگر $\langle A_1, A_2 \rangle$ همهٔ E باشد که حکم ثابت شده است، و گرنه، عنصری A_3 در E وجود دارد که $\{A_1, A_2, A_3\}$ مستقل خطی است. استدلال بالا را مجدداً به‌کار می‌گیریم. همهٔ ترکیب‌های خطی A_1, A_2, A_3، طبق (الف) و (ب)، باید در E باشند. در صورتی که $\langle A_1, A_2, A_3 \rangle$ همه E نباشد، عنصری A_4 انتخاب می‌کنیم و غیره. این استدلال باید در حداکثر n گام به نتیجه رسد زیرا در $\mathbb{R}^n$ یک مجموعهٔ مستقل خطی نمی‌تواند بیش از n عضو داشته باشد. بنابراین اگر E فقط از $\underline{0}$ تشکیل نشده باشد، در گامی k، $1 \leq k \leq n$، به این نتیجه می‌رسیم که $E = \langle A_1, \ldots, A_k \rangle$ و حکم به اثبات می‌رسد. $\square$

توجه کنید که این گزاره نوعی تایید برقرار بودن ایدهٔ شهودی "مسطح بودن" زیرفضاهای خطی است. اگر نقطه‌ای x در E باشد خط گذرا از $\underline{0}$ و x به تمامی در E واقع است، و اگر x و x' در E باشند، صفحه گذرا از $\underline{0}$، x و x' در E واقع است. طبق قسمت دوم گزاره، اگر این دو شرط برای E برقرار باشند می‌توان حکم کرد که E متشکل از همهٔ ترکیب‌های خطی k عضو $\mathbb{R}^n$ است.