# آنالیز برداری (۳)

آخرین قضیه از رشته قضایایی که انتگرال روی یک مجموعه را به انتگرال روی مرز مرتبط می‌سازد 'قضیه دیوژرانس' است که در این بخش به آن خواهیم پرداخت. نخست حالت دوبعدی این قضیه را که در واقع یک بازنویسی قضیهٔ گرین است بررسی می‌کنیم.

ناحیهٔ $D$ در صفحه $xy$ را در نظر بگیرید که در شرایط قضیه گرین (قضیه ۳۹–۱) صدق می‌کند یعنی مرز آن $\partial D$ از اجتماعی متناهی خمهای قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و $\partial D$ طبق قرارداد جهت داده شده است. مماس واحد در نقاط غیرگوشه‌ای را در نظر بگیرید، $\vec{T}=(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds})$. قائم واحد برونگرا نسبت به $D$ را، که به $\vec{n}$ نمایش می‌دهیم، از دوران $\vec{T}$ به اندازه $\frac{\pi}{2}$ در جهت عقربهٔ ساعت به دست می‌آید، پس $\vec{n}=(\frac{dy}{ds},-\frac{dx}{ds})$. حال فرض کنید $\vec{G}=(G_1,G_2)$ یک میدان برداری $C^1$ است که دامنهٔ تعریف آن شامل $D$ و $\partial D$ است. در این‌صورت داریم:

$$\vec{G}.\vec{n}=G_1\frac{dy}{ds}-G_2\frac{dx}{ds}$$

میدان برداری $\vec{F}=(F_1,F_2)$ را با روابط $F_1=-G_2$ و $F_2=G_1$ تعریف می‌کنیم، پس

$$\vec{G}.\vec{n}=\vec{F}.\vec{T} \qquad (۱)$$

از طرفی دیگر

$$\operatorname{div}\vec{G}=\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y} \qquad (۲)$$

پس با جایگزینی (۱) و (۲) در قضیهٔ گرین برای میدان برداری $\vec{F}$ داریم:

$$\int_{\partial D}\vec{G}.\vec{n}\,ds=\int_D\int \operatorname{div}G\,dA_{x,y} \qquad (۳)$$

فرمول (۳) صورت دیورژانس قضیهٔ گرین نام دارد. این قضیه گاهی بدین صورت بیان می‌شود که انتگرال دیورژانس در ناحیهٔ $D$ برابر شار خروجی از مرزهای ناحیه است. توجه کنید که $\vec{G}\cdot\vec{n}$ نمایانگر مؤلفه خروجی میدان $\vec{G}$ از مرز ناحیه است. در واقع (۳) منجر به تعبیر هندسی- فیزیکی مورد نظر از مفهوم دیورژانس می‌شود. فرض کنید $D_\rho$ یک گوی به شعاع $\rho$ حول نقطه‌ای $p$ در صفحه باشد. چون $\vec{G}$ دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته فرض شده است، $div\vec{G}$ پیوسته است و طبق قضیهٔ میانگین انتگرال، $\int\int_{D_\rho} div\vec{G}dA$ برابر حاصل‌ضرب مساحت $D_\rho$ در $(div\vec{G})(Q)$ می‌باشد که $Q$ نقطه‌ای مناسب در $D_\rho$ است:

$$\int_{D_\rho}(div\vec{G})dA = (\pi\rho^۲)(div\vec{G})(Q)$$

حال اگر $\rho$ به صفر میل داده شود، از پیوستگی $div\vec{G}$ نتیجه می‌شود که $div\vec{G}(Q)$ به $div\vec{G}(P)$ میل می‌کند، پس:

$$(div\vec{G})(P) = \lim_{p\to ۰}\frac{\int_{\partial D_\rho}\vec{G}\cdot\vec{n}\,ds}{\pi\rho^۲} \qquad (۴)$$

توجه کنید که صورت کسر، شار خروجی از دایرهٔ $\rho$ حول $P$ است و مخرج مساحت درون دایره، بنابراین $div\vec{G}(P)$ معمولاً بدین صورت تعبیر می‌شود که نمایانگر میزان شار خروجی حول $P$ در واحد مساحت است. مثبت بودن $div\vec{G}(P)$ دلالت بر این دارد که برای دایره‌های کوچک حول $P$، $\vec{G}\cdot\vec{n}$ بیشتر مثبت است تا منفی، یعنی تمایل میدان بیشتر به دور شدن از $P$ (انبساط حول $P$) است، و برعکس منفی بودن $div\vec{G}(P)$، نمایانگر تمایل میدان به انقباض به سوی $P$ است. این تعبیر شهود مناسبی از کاربردهای دیورژانس در فیزیک می‌دهد.

(۴۱-۱)یک کاربرد هندسی فرض کنید $D$ یک ناحیهٔ بسته، کراندار و محدب در صفحه باشد که مرز آن، $\partial D$، تصویر یک خم پیوستهٔ ساده، بسته و قطعه قطعه هموار است. ناحیهٔ محدب ناحیه‌ای است که برای هر دو نقطهٔ $P$ و $Q$ از آن، پاره‌خط واصل بین $P$ و $Q$ به تمامی در ناحیه قرار گیرد. می‌خواهیم نوعی مفهوم "مرکز" و "شعاع" برای $D$ منظور کنیم. برای هر نقطهٔ $p$ از $D$، $r_p$ به صورت

$$r_p = \max\{|q-p| \mid q\in\partial D\}$$

تعریف می‌شود، یعنی $r_p$ حداکثر فاصلهٔ $p$ از نقاط مرزی $D$ است. از پیوستگی خم تعریف کنندهٔ مرز می‌توان نتیجه گرفت که این ماکسیمم به‌ازای نقطه‌ای از مرز اتخاذ می‌شود. همچنین از محدب بودن ناحیه می‌توان نشان داد که $r_p$ به طور پیوسته با $p$ تغییر می‌کند و بنابراین نقطه‌ای $C$ در $D$ یافت می‌شود که در آن $r_C$ حداقل ممکن است:

$$r_C = \min\{r_p \mid p \in D\}$$

$r_C = r$ را <u>شعاع $D$</u> و $C$ را یک <u>مرکز $D$</u> می‌نامیم. برای گوی بستهٔ معمولی، مفهوم شعاع و مرکز همان مفهوم متداول است. حال اگر $A$ مساحت $D$ و $L$ محیط $\partial D$ باشد، ثابت می‌کنیم:

$$A \leq \frac{۱}{۲} r \cdot L \qquad (۵)$$

برای گوی مدور، در (۵) تساوی برقرار است. برای اثبات (۵)، میدان $\vec{G}$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\vec{G}(x,y) = (x - x_C, y - y_C)$$

که در آن $C = (x_C, y_C)$ مرکز است. داریم $div\vec{G} = ۲$. از سویی دیگر، اگر $(x,y)$ یک نقطهٔ مرزی باشد:

$$\vec{G} \cdot \vec{n} = |\vec{G}||\vec{n}| \cos \measuredangle(\vec{G}, \vec{n}) \leq |\vec{G}|$$

ولی $|\vec{G}(x,y)|$ برابر فاصله $(x,y)$ از $C$ است، پس $|\vec{G}| \leq r$، یا

$$\vec{G} \cdot \vec{n} \leq r$$

بنابراین

$$۲A = \int\int_D div\vec{G} = \int_{\partial D} (\vec{G} \cdot \vec{n}) ds \leq r \cdot L$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

قضیه دیورژانس تعمیمی در همه ابعاد دارد. در زیر تعمیم آن به ناحیه‌های سه‌بعدی را تشریح می‌کنیم.

(۴۱—۲) <u>قضیهٔ دیورژانس</u> $M$ یک ناحیهٔ سه بعدی مجاز انتگرال‌گیری در $\mathbb{R}^3$ است که به اجتماع متناهی رویه‌های قطعه قطعه هموار $\partial M$ محصور می‌باشد و $\vec{G}$ یک میدان برداری دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است که در سراسر $M$ و $\partial M$ تعریف شده است. در این صورت اگر $\vec{n}$ قائم واحد برونگرای $\partial M$ باشد، داریم:

$$\int\int\int_M div\vec{G}dV = \int\int_{\partial M}\vec{G}\cdot\vec{n}dS \tag{۶}$$

ملاحظات زیر مشابه نکات متناظر در حالت دو بعدی هستند.

(۴۱—۳) <u>تعبیر دیورژانس.</u> $M_\rho$ را گوی بستهٔ شعاع $\rho$ حول نقطه $p$ می‌گیریم. طبق قضیهٔ میانگین انتگرال، نقطه‌ای $Q$ در این گوی وجود دارد که

$$\int\int\int_M div\vec{G}dV = (\text{حجم } M_\rho)\cdot(div\vec{G})(Q)$$

بنابراین

$$div\vec{G}(Q) = \frac{\int\int_{\partial M_\rho}\vec{G}\cdot\vec{n}dS}{\text{حجم } M_\rho}$$

حال وقتی $\rho \longrightarrow 0$، $div\vec{G}(Q)$ به $\vec{G}(p)$ میل می‌کند زیرا که مشتق‌های پاره‌ای $G$، و در نتیجه $div\vec{G}$، پیوسته فرض شده‌اند. از این رو $div\vec{G}(p)$ به آهنگ انبساط میدان حول $p$ نسبت به واحد حجم تعبیر می‌شود.

(۴۱—۴) همان‌گونه که برای ناحیه‌های محدب دو بعدی، "شعاع" و "مرکز" تعریف کرده‌ایم، برای ناحیه‌های محدب سه بعدی نیز مرکز و شعاع تعریف می‌شوند. در اینجا نیز با در نظر گرفتن میدان

$$\vec{G}(x,y,z) = (x-x_c, y-y_c, z-z_c) \qquad (x_c,y_c,z_c) : \text{مرکز ناحیه}$$

می‌توان ثابت کرد که:

$$V \le \frac{1}{3}rS$$

که $V$ حجم ناحیه، $S$ سطح جانبی و $r$ شعاع است. برای گوی سه بعدی تساوی برقرار است.

اثبات قضیهٔ دیورژانس اثبات قضیه دیورژانس سه بعدی نیز کاملاً مانند اثبات قضیهٔ گرین دو بعدی است، نخست قضیه برای مستطیل‌های با اضلاع موازی محورها ثابت می‌شود، سپس برای ناحیه‌های قابل تجزیه به این گونه مستطیل‌ها، و بالاخره در حد برای ناحیه‌های مجاز ذکر شده در صورت قضیه. برای مستطیل $a_۱ \leq x \leq a_۲$، $b_۱ \leq y \leq b_۲$، $c_۱ \leq z \leq c_۲$، و $\vec{G} = G_۱\vec{i} + G_۲\vec{j} + G_۳\vec{k}$، سه انتگرال $\int\int\int_M \frac{\partial G_۱}{\partial x}dV$، $\int\int\int_M \frac{\partial G_۲}{\partial y}dV$، و $\int\int\int_M \frac{\partial G_۳}{\partial z}dV$ را به طور جداگانه محاسبه می‌کنیم. برای اولی، نخست نسبت به $x$ انتگرال‌گیری می‌کنیم که بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نتیجه می‌دهد:

$$\int_{c_۱}^{c_۲}\int_{b_۱}^{b_۲}[G_۱(a_۲, y, z) - G_۱(a_۱, y, z)]dydz$$

روی وجه‌های $x = a_۱$ و $x = a_۲$، به ترتیب، قائم واحد برابر $-\vec{i}$ و $\vec{i}$ است و در نتیجه:

$$-G_۱(a_۱, y, z) = \vec{G}\cdot\vec{n} \quad \text{روی} \quad x = a_۱$$

$$G_۱(a_۲, y, z) = \vec{G}\cdot\vec{n} \quad \text{روی} \quad x = a_۲$$

پس $\int\int\int_M \frac{\partial G_۱}{\partial x}dV$ برابر $\int\int \vec{G}\cdot\vec{n}dS$ روی دو وجه $x = a_۱$ و $x = a_۲$ می‌شود. به همین ترتیب دو انتگرال سه‌گانه دیگر برابر انتگرال‌های $\vec{G}\cdot\vec{n}$ روی چهار وجه باقیمانده می‌شوند و حکم به اثبات می‌رسد. اکنون دو مثال در نظر می‌گیریم.

مثال ۱. $D$ ناحیه‌ای مسطح واقع بر یک صفحه در $\mathbb{R}^۳$ است و $P$ نقطه‌ای خارج این صفحه. از $P$ به همهٔ نقاط $D$ وصل می‌کنیم و جسم حاصل را مخروط به رأس $P$ و قاعدهٔ $D$ می‌نامیم. نشان می‌دهیم:

$$\text{حجم مخرو} = \frac{۱}{۳}(\text{ارتفاع})(D \text{ مساحت})$$

که در اینجا مقصود از ارتفاع فاصلهٔ قائم $P$ از صفحه‌ای است که $D$ در آن واقع است. میدان برداری

$$\vec{G}(x, y, z) = (x - x_P)\vec{i} + (y - y_P)\vec{j} + (z - z_P)\vec{k}$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $P = (x_p, y_p, z_p)$. داریم $div\vec{G} = ۳$. "سطح جانبی مخروط" اجتماع پاره‌خط‌هایی است که رأس $P$ را به نقاط مرزی $D$ وصل می‌کنند. روی این سطح $\vec{n}$ بر این خطوط

واصل عمود است، پس $\vec{G}\cdot\vec{n}=0$ و $\int\int \vec{G}\cdot\vec{n}dS$ روی سطح جانبی صفر می‌شود. برای سطح قاعده، $D$، داریم:

$$\vec{G}\cdot\vec{n} = |\vec{G}||\vec{n}|\cos\measuredangle(\vec{G},\vec{n}) = |\vec{G}|\cos\measuredangle(\vec{G},\vec{n})$$

برای نقطهٔ $(x,y,z)$ در $D$، $G(x,y,z)$ برابر بردار $(x-x_P, y-y_P, z-z_P)$ است که اگر در کسینوس زاویهٔ بین $\vec{G}$ و $\vec{n}$ ضرب شود تصویر قائم $\vec{G}$ بر امتداد عمود بر صفحهٔ $D$ را می‌دهد که همان ارتفاع است، پس

$$\int\int_D \vec{G}\cdot\vec{n}dS = (\text{ارتفاع})(D\ \text{مساحت})$$

و حکم از قضیهٔ دیورژانس نتیجه می‌شود.

<u>مثال ۲.</u> میدان $\vec{G}(x,y,z) = A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ را در نظر می‌گیریم که در آن $A, B, C$ اعداد حقیقی داده شده‌اند. $T^+$ را نیمهٔ بالایی چنبره توصیف شده در مثال ۳، بخش ۳۵، می‌گیریم، یعنی:

$$T^+ : (x,y,z) = ((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, a\sin u)$$
$$\vec{n}, 0\le u\le \pi, 0\le v\le 2\pi \ \text{قائم قراردادی که در اینجا درونگرا است}$$

انتگرال روی رویهٔ $\int\int_{T^+}\vec{G}\cdot\vec{n}dS$ را به کمک قضیهٔ دیورژانس محاسبه می‌کنیم. به صورت داده شده، $T^+$ هیچ ناحیهٔ سه بعدی را محصور نمی‌کند و نمی‌توان از قضیهٔ دیورژانس استفاده کرد. در این گونه مسایل معمولاً رویه یا رویه‌های دیگری را جستجو می‌کنیم که در مرز به رویهٔ داده شده وصل شده و با هم یک ناحیه را محصور کنند. برای رویهٔ دوم کاندیداهای متنوعی وجود دارد، انتخاب مناسب انتخابی است که برای آن محاسبهٔ $\int\int\vec{G}\cdot\vec{n}dS$ ساده باشد. در این مثال رویهٔ حلقوی و مسطح:

$$R : z=0, (a-b)^2 \le x^2+y^2 \le (a+b)^2$$

در صفحهٔ $xy$ همراه با $T^+$ یک ناحیهٔ سه بعدی $M$ را محصور می‌کند. به علاوه چون $div\vec{G}=0$، از قضیه دیورژانس داریم:

$$\int\int_{T^+}\vec{G}\cdot\vec{n}dS + \int\int_R \vec{G}\cdot\vec{n}dS = 0$$

بدین ترتیب برای $R$، $\vec{n} = -\vec{k}$ و $\vec{G}\cdot\vec{n} = -C$، پس $\int\int_{T^+} \vec{G}\cdot\vec{n}dS = (-C)(R$ مساحت$)$ ، یعنی $-4\pi abC$.

(۴۱—۵) <u>پتانسیل برداری</u> در بررسی وجود پتانسیل برای میدانهای برداری دیدیم که اگر $curl\vec{F} = \underline{Q}$ و دامنهٔ تعریف $\vec{F}$ از شرط هندسی مناسبی ('نداشتن حفره') برخوردار باشد، آنگاه $\vec{F}$ دارای پتانسیل است، یعنی تابع $f$ وجود دارد که $\vec{F} = \nabla f$.

اکنون با توجه به این اتحاد که $\mathrm{div}(curl\vec{F}) = 0$ (به شرط $C^2$ بودن میدان $\vec{F}$)، این سؤال مطرح می‌شود که اگر برای میدانی $C^1$، $\vec{G}$، داشته باشیم $\mathrm{div}\,\vec{G} = 0$، آیا میدان برداری $\vec{F}$ وجود دارد که $\vec{G} = curl\vec{F}$؟

در صورت وجود، $\vec{F}$ را یک <u>پتانسیل برداری</u> برای $\vec{F}$ می‌نامند.

در اینجا نیز با افزودن شرطی هندسی بر دامنهٔ تعریف $\vec{G}$ می‌توان به نتیجهٔ مثبت رسید، ولی نخست مثال زیر را در نظر بگیرید که نشان می‌دهد بدون افزودن شرط مناسب، جواب ممکن است منفی باشد.

<u>مثال</u> میدان $\vec{G}$ روی $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\vec{G}(x,y,z) = (\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}) \qquad (7)$$

که در آن $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (فاصله از مبدا). میدان $\vec{G}$ یک میدان $C^1$ در $U$ است. محاسبه سر راست نشان می‌دهد که در سراسر $U$ داریم $\mathrm{div}\,\vec{G} = 0$، ولی نشان می‌دهیم $\vec{G}$ فاقد پتانسیل است. فرض کنید میدان $\vec{F}$ وجود دارد که $\vec{G} = curl\vec{F}$. در این‌صورت برای هر رویهٔ بستهٔ $D$ در $U$ باید طبق قضیه استوکس داشته باشیم:

$$\int_D\int \vec{G}.\vec{n}dS = 0$$

$D$ را کرهٔ واحد $x^2+y^2+z^2 = 1$ با قائم واحد برونگرای $\vec{n} = (x,y,z)$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$\vec{G}.\vec{r} = \frac{1}{r} = 1$$

پس $\int_D\int \vec{G}.\vec{r}dS = 4\pi \neq 0$ که نشان می‌دهد $\vec{G}$ نمی‌تواند به شکل $curl\vec{F}$ باشد.

شرط هندسی برای هر رویهٔ قطعه قطعه هموار بستهٔ $D$ در $U$ ، ناحیهٔ درون در $U$ قرار می‌گیرد.

به شباهت این شرط با شرط متناظر در مورد وجود پتانسیل اسکالر توجه کنید. در اینجا به جای خم بسته، رویهٔ بسته (یک بعد بالاتر) را منظور کرده‌ایم. در واقع در اینجا طبق قضیهٔ استوکس می‌توان نتیجه گرفت که انتگرال $\vec{G}.\vec{r}$ روی هر رویهٔ بسته واقع شده در $U$ صفر خواهد شد و نکتهٔ اصلی اثبات وجود پتانسیل برداری این شرط است.

در پایان شایان ذکر است که اگر ناحیهٔ $U$ از شرط هندسی محدود کننده‌تری که در زیر خواهد آمد برخوردار باشد، به روشهای موجود می‌توانیم وجود پتانسیل را ثابت کنیم. ناحیهٔ $U$ را ستاره‌وار نسبت به نقطهٔ $P$ می‌نامیم در صورتی که پاره‌خط واصل از هر نقطهٔ $(x, y, z)$ ناحیه $U$ به نقطهٔ $P$ به تمامی در ناحیهٔ $U$ قرار گیرد.

(۶–۴۱) (لم پوانکاره) فرض کنید $U$ ناحیه‌ای ستاره‌وار نسبت به نقطهٔ $P$ در $\mathbb{R}^3$ باشد و $\vec{F}$ و $\vec{G}$ دو میدان برداری $C^1$ پیوسته در $U$. در این صورت:

(الف) اگر $curl\vec{F} = \underline{0}$، آنگاه $\vec{F}$ پایسته است و تابع $f$ زیر یک پتانسیل برای آن است:

$$f(x, y, z) = \int_0^1 (\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt})dt$$

که $\vec{r}(t) = P + t((x, y, z) - P)$، $0 \le t \le 1$، پاره‌خط واصل از $P$ به $(x, y, z)$ است.

(ب) اگر $div\vec{G} = 0$، آنگاه $\vec{G}$ دارای پتانسیل برداری است. میدان $\vec{H}$ زیر یک چنین پتانسیل برداری است:

$$\vec{H}(x, y, z) = \int_0^1 (\vec{G} \times \frac{d\vec{r}}{dt})tdt$$

که در آن $\vec{r}(t) = P + t((x, y, z) - P)$، $0 \le t \le 1$ پاره‌خط واصل از $P$ به $(x, y, z)$ است. (در اینجا مقصود از انتگرال تابع برداری، برداری است که هر مؤلفه آن انتگرال مؤلفه متناظر است.)

اثبات در هر دو مورد داریم

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (x - x_P, y - y_P, z - z_P)$$

نخست به اثبات (الف) می‌پردازیم. باید ثابت کنیم $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$، $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ و $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$. یک مورد، مثلاً

$\frac{\partial f}{\partial x} = F_۱$، را ثابت می‌کنیم، دو مورد دیگر مشابه است. داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\int_۰^۱ (\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt})dt$$

چون $\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$ دارای مشتق پاره‌ای پیوسته نسبت به $x$ است، می‌توان طبق قضیه‌ای مشتق‌گیری $\frac{\partial}{\partial x}$ را به داخل انتگرال منتقل کرد، پس

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_۰^۱ (\frac{\partial}{\partial x}(\vec{F}(r(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt})dt \\
&= \int_۰^۱ \frac{\partial}{\partial x}[(x-x_P)F_۱(\vec{r}(t)) + (y-y_P)F_۲(\vec{r}(t)) + (z-z_P)F_۳(\vec{r}(t))]dt \\
&= \int_۰^۱ [F_۱(\vec{r}(t)) + (x-x_P)t\frac{\partial F_۱}{\partial x}(\vec{r}(t)) + (y-y_P)t\frac{\partial F_۲}{\partial x}(\vec{r}(t)) + (z-z_P)t\frac{\partial F_۳}{\partial x}(\vec{r}(t))]dt
\end{aligned}$$

حال از فرض $curl\vec{F} = ۰$ نتیجه می‌شود که $\frac{\partial F_۱}{\partial y} = \frac{\partial F_۲}{\partial x}$ و $\frac{\partial F_۱}{\partial z} = \frac{\partial F_۳}{\partial x}$، پس

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \int_۰^۱ [F_۱(\vec{r}(t)) + t(x-x_P)\frac{\partial F_۱}{\partial x}(\vec{r}(t)) + t(y-y_P)\frac{\partial F_۱}{\partial y}(\vec{r}(t)) + t(z-z_P)\frac{\partial F_۱}{\partial z}(\vec{r}(t))]dt \\
&= \int_۰^۱ \frac{d}{dt}(tF_۱(r(t)))dt \\
&= (tF_۱(\vec{r}(t)))|_۰^۱ \\
&= F_۱(x,y,z)
\end{aligned}$$

و (الف) به اثبات می‌رسد.

اثبات (ب) مشابه است. اگر بنویسیم $\vec{G} = G_۱\vec{i} + G_۲\vec{j} + G_۳\vec{k}$ و $H = H_۱\vec{i} + H_۲\vec{j} + H_۳\vec{k}$، باید نشان دهیم $\frac{\partial H_۳}{\partial y} - \frac{\partial H_۲}{\partial z} = G_۱$ و مشابهاً برای دو مؤلفه دیگر. تساوی $\frac{\partial H_۳}{\partial y} - \frac{\partial H_۲}{\partial z} = G_۱$ را نشان می‌دهیم، دو مورد دیگر مشابه است. داریم:

$$\begin{cases}
H_۲(x,y,z) = \int_۰^۱ [G_۳(\vec{r}(t))(x-x_P) - G_۱(\vec{r}(t))(z-z_P)]tdt \\
H_۳(x,y,z) = \int_۰^۱ [G_۱(\vec{r}(t))(y-y_P) - G_۲(\vec{r}(t))(x-x_P)]tdt
\end{cases}$$

$$\frac{\partial H_۲}{\partial z} = \int_۰^۱ [\frac{\partial G_۳}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (x-x_P) - \frac{\partial G_۱}{\partial z}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (z-z_P) - G_۱(\vec{r}(t))]tdt$$

$$\frac{\partial H_۳}{\partial y} = \int_۰^۱ [G_۱(\vec{r}(t)) + \frac{\partial G_۱}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (y-y_P) - \frac{\partial G_۲}{\partial y}(\vec{r}(t)) \cdot t \cdot (x-x_P)]tdt$$

پس با توجه به فرض $div\vec{G} = 0$ که نتیجه می‌دهد $\frac{\partial G_1}{\partial x} = -\frac{\partial G_3}{\partial z} - \frac{\partial G_2}{\partial y}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z} &= \int_0^1 \{2tG_1(\vec{r}(t)) + t^2[\frac{\partial G_1}{\partial x}(\vec{r}(t)) \cdot (x - x_P) + \frac{\partial G_1}{\partial y} \cdot (y - y_P) + \frac{\partial G_1}{\partial z} \cdot (z - z_P)]\}dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}[t^2 G_1(\vec{r}(t))]dt \\
&= (t^2 G_1(\vec{r}(t)))|_0^1 \\
&= G_1(x, y, z)
\end{aligned}$$

و حکم به اثبات می‌رسد.

و السلام