# آنالیز برداری (۲)

قضیهٔ گرین انتگرال دوگانهٔ عبارت $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ روی یک ناحیهٔ مسطح در صفحه را برحسب انتگرال $\vec{F}.d\vec{r}$ روی مرز ناحیه بیان می‌کنند. در نظر اول ممکن است عبارت $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ مصنوعی به‌نظر رسد. ولی اگر $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ را در نظر بگیریم، عبارت بالا مؤلفه سوم میدان $curl\vec{F}$ است. در واقع تعمیم مهمی از قضیهٔ گرین به ناحیه‌های خمیده (تصویر رویه‌های قطعه قطعه هموار) وجود دارد که در آن به جای این عبارت از $curl\vec{F}$ استفاده می‌شود. این قضیه را در زیر نخست در ساده‌ترین حالت در نظر می‌گیریم.

فرض کنید $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ یک رویهٔ هموار با شرایط اضافی زیر باشد:

الف) $W$ دارای مرزی است که از یک یا چند (تعدادی متناهی) تصویر خم قطعه قطعه هموار تشکیل شده است.

ب) $\varphi$ یک‌به‌یک است.

در این‌صورت $D = \varphi(W)$ را یک <u>رویهٔ ساده</u> می‌نامیم. مرز $D$، $\partial D$، برابر $\varphi(\partial W)$ تعریف می‌شود.

<u>مثال ۱</u> فرض کنید $W = \{(u,v) | 0 \leq u \leq \pi, -1 \leq v \leq 1\}$ و $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varphi(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

به سادگی دیده می‌شود که $\varphi$ یک‌به‌یک است. داریم

$$\begin{aligned} \varphi_u \times \varphi_v &= (-\sin u, \cos u, 0) \times (0, 0, 1) \\ &= (\cos u, \sin u, 0) \end{aligned}$$

به ازای هر $(u,v)$ داریم $\varphi_u \times \varphi_v \neq 0$، پس $\varphi$ یک رویهٔ هموار تعریف می‌کند. $D = \varphi(W)$ روی سطح استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ دارد و نیمی از قطعهٔ $-1 \leq z \leq 1$، یعنی نیمهٔ $y \geq 0$، را در برمی‌گیرد (شکل ۱).مرز $D$ از دو پاره‌خط راست و دو نیمدایره تشکیل شده است.

شکل ۱

<u>مثال ۲</u> فرض کنید

$$W = \{(u,v) | 1 \leq |u| + |v| \leq 2\}$$

$W$ ناحیهٔ بین دو مربع در صفحه $uv$ است (شکل ۲)

شکل ۲

حال $\varphi : W \to \mathbb{R}^3$ را به‌صورت $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 + v^2)$ تعریف می‌کنیم. $D = \varphi(W)$ قطعه ای از نمودار تابع $z = x^2 + y^2$ است و می‌دانیم که نمودار یک تابع $C^1$ تصویر یک رویهٔ هموار است. $\varphi$ در اینجا به وضوح یک‌به‌یک است. مرز $D$ از دو خم تشکیل شده است که هریک قطعه قطعه هموار و اجتماع چهار قطعهٔ هموار است (شکل ۳).

شکل ۳

یادآوری می‌کنیم که برای رویهٔ ساده $D = \varphi(W)$ جهت قراردادی با قائم واحد

$$\vec{n} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v|}$$

تعریف می‌شود. همچنان که در مورد مرز یک ناحیهٔ دوبعدی عمل کردیم، اکنون جهت مشخصی برای $\partial D$ منظور می‌کنیم.

در هر نقطهٔ مرزی غیرگوشه‌ای، $\vec{\nu}$ را بردار واحدی می‌گیریم که بر رویهٔ $D$ مماس است، بر مرز یعنی $\partial D$، عمود است و به درون $D$ اشاره می‌کند. حال مماس واحد، $\vec{T}$، در یک نقطهٔ غیرگوشه‌ای را آن مماس واحد بر $\partial D$ در آن نقطه می‌گیریم که $(\vec{T}, \vec{\nu}, \vec{n})$ یک سه‌تایی مرتب راستگرد باشد. اگر

انسانی را تصور کنیم که روی $\partial D$، در جهت $\vec{T}$ حرکت می‌کند و دست چپ او به طرف درون $D$ است، جهت سر این انسان متحرک باید به طرف قائم قراردادی رویه، یعنی $\vec{n}$، باشد.

برای مثالهای ۱ و ۲، $\vec{T}$ را محاسبه می‌کنیم. در مثال ۱ دیدیم که $\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$. روی قطعهٔ افقی $t = -1$ که با $v = -1$ مشخص می‌شود، داریم $\vec{\nu} = (0, 0, 1)$، پس

$$\vec{T} = \vec{\nu} \times \vec{n} = (-\sin u, \cos u, 0)$$

به همین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که روی قطعهٔ قائم متناظر با $u = \pi$، داریم $\vec{n} = (0, 0, 1)$، روی قطعهٔ افقی متناظر با $v = 1$، $\vec{T} = (\sin u, -\cos u, 0)$، و بالاخره روی قطعهٔ قائم متناظر با $u = 0$، $\vec{T} = (0, 0, -1)$.

در مثال ۲، قائم واحد عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi \times \varphi_v}{|\varphi_u \times \varphi_v} &= \frac{(1,0,2u)\times(0,1,2v)}{|(1,0,2u)\times(0,1,2v)|} \\ &= \frac{(-2u,-2v,1)}{\sqrt{4u^2+4v^2+1}} \end{aligned}$$

که قائم بر نمودار سهمی‌وار $z = x^2 + y^2$ است که مؤلفهٔ سوم آن مثبت است، یعنی به‌طرف 'داخل' سهمی‌وار، یعنی ناحیه $z > x^2 + y^2$، اشاره دارد. نتیجه این که جهت $\partial D$ طبق شکل ۱۰ می‌باشد. توجه کنید که اگر این جهت‌ها را بر صفحه $xy$ ($=$ صفحه $uv$) تصویر کنیم (ناحیهٔ شکل ۹)، مربع داخلی در جهت عقربهٔ ساعت و مربع خارجی در جهت مثلثاتی جهت می‌گیرد که سازگار با جهت مرز در قضیهٔ گرین است.

این در واقع کلیت دارد زیرا که $\varphi_u$ تصویر $(1, 0)$ تحت $D\phi(u,v)$ است، $\varphi_v$ تصویر $(0, 1)$ تحت $D\phi(u,v)$، پس $\vec{n} = \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v|}$ و $(\vec{\varphi}_u, \vec{\varphi}_v, \vec{n})$ مانند $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ راستگرد است. حال چون تحت $\varphi$، درون $W$ به درون $D = \varphi(W)$ نگاشته می‌شود، جهت مرزها نیز متناظر خواهد شد.

اکنون می‌توانیم قضیهٔ استوکس را برای رویه‌های ساده بیان کنیم. در زیر مرز رویه طبق قرارداد بالا جهت داده شده است.

(۲—۴۰) قضیه استوکس (رویه‌های ساده) $D = \varphi(W)$ یک رویهٔ ساده در $\mathbb{R}^3$ است که $\varphi$ تابعی $C^2$ است و مرز رویه، $\partial D$، طبق قرارداد جهت داده شده است و $\vec{n}$ قائم واحد قراردادی روی $D$ می‌باشد،

اگر $\vec{F}$ یک میدان برداری $C^{1}$ باشد که دامنهٔ تعریف آن شامل $D$ و مرز آن است، داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{D}\int curl\vec{F}.\vec{n}dS \qquad (1)$$

<u>برهان</u> همان طور که انتظار می‌رود فرمول بالا با نوشتن $(x,y,z)$ به صورت $\varphi(u,v)$ و استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای به فرمول گرین در صفحه $uv$ برای $W$ و $\partial W$ تبدیل می‌شود. طبق معمول می‌نویسیم:

$$(x,y,z) = \vec{r} = \varphi(u,v) = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v), \varphi_3(u,v))$$

نخست عبارت داخل انتگرال سمت چپ را برحسب $(u,v)$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= F_1dx + F_2dy + F_3dz \\ &= F_1(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}dv) + F_2(\frac{\partial\varphi_2}{\partial u}du + + \frac{\partial\varphi_2}{\partial v}dv) + F_3(\frac{\partial\varphi_3}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi_3}{\partial v}dv) \end{aligned}$$

پس

$$\vec{F}\cdot d\vec{r} = (\vec{F}\cdot\vec{r}_u)du + (\vec{F}\cdot\vec{r}_v)dv$$

و طبق قضیهٔ گرین در صفحه داریم

$$\begin{aligned} \int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{\partial W}[(\vec{F}(\varphi(u,v))\cdot\vec{r}_u)du + (\vec{F}(\varphi(u,v)\cdot\vec{r}_v)dv] \\ &= \int\int_{W}[\frac{\partial}{\partial u}(\vec{F}(\varphi(u,v))\cdot\vec{r}_v) - \frac{\partial}{\partial v}(\vec{F}(\varphi(u,v)\cdot\vec{r}_u)]dA \end{aligned}$$

عبارت داخل انتگرال را بسط می‌دهیم:

$$[\frac{\partial}{\partial u}(F_1x_v + F_2y_v + F_3z_v) - \frac{\partial}{\partial v}(F_1x_u + F_2y_u + F_3z_u)]dudv$$

$$= [\frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial u}x_v + (F_1\circ\varphi)x_{vu} - \frac{\partial(F_1\circ\varphi)}{\partial v}x_u - (F_1\circ\varphi)x_{uv}$$

$+$(دو دسته چهارتایی جملات مشابه)$]dudv$

چون مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم $\varphi$ پیوسته فرض شده‌اند داریم $x_{vu} = x_{uv}$ و نصف جملات حذف

می‌شوند. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای عبارت بالا برابر می‌شود با:

$$[(\frac{\partial F_۱}{\partial x}x_u + \frac{\partial F_۱}{\partial y}y_u + \frac{\partial F_۱}{\partial z}z_u)x_v - (\frac{\partial F_۱}{\partial x}x_v + \frac{\partial F_۱}{\partial y}y_v + \frac{\partial F_۱}{\partial z}z_v)x_u$$

$$+(\text{دو دسته جملات مشابه}))]dudv$$

$$= [-\frac{\partial F_۱}{\partial y}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial F_۱}{\partial z}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_۲}{\partial z}\cdot\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + \frac{\partial F_۲}{\partial x}\cdot\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial F_۳}{\partial x}\cdot\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}$$

$$+\frac{\partial F_۳}{\partial y}\cdot\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}]dudv$$

$$= [(\frac{\partial F_۳}{\partial y} - \frac{\partial F_۲}{\partial z})\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + (\frac{\partial F_۱}{\partial z} - \frac{\partial F_۳}{\partial x})\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + (\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y})\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}]dudv$$

که انتگرال عبارت بالا روی $W$ دقیقاً برابر $\int\int_D(\vec{F}\cdot\vec{n})dS$ است و حکم به اثبات می‌رسد. ■

<u>مثال ۱</u> $M$ را بخشی از نمودار $z = f(x,y) = ۱ - x^۲ - y^۲$ می‌گیریم که در بالای صفحه $xy$، یعنی در $z \geq ۰$، قرار دارد و $\vec{n}$ را قائم واحد به طرف $z$ های مثبت روی این رویه می‌گیریم. میدان $\vec{F}$ به صورت زیر داده شده است:

$$\vec{F}(x,y,z) = (x-y)\vec{i} + (x+y^۲)\vec{j} + z^۲\vec{k}$$

می‌خواهیم $\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ را محاسبه کنیم. $\partial D$ عبارت است از دایرهٔ واحد $x^۲ + y^۲ = ۱$، $z = ۰$. با توجه به این که $D$ به وسیله $(u,v) \longmapsto (u, v, ۱ - u^۲ - v^۲)$، $u^۲ + v^۲ \leq ۱$، پرمایش می‌شود و قائم واحد عبارت است از:

$$\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \frac{(۱,۰,-۲u)\times(۰,۱,-۲v)}{|(۱,۰,-۲u)\times(۰,۱,-۲v)|} = \frac{(۲u,۲v,۱)}{\sqrt{۴u^۲ + ۴v^۲ + ۱}}$$

که مؤلفهٔ $z$ آن مثبت است و برای به کارگیری قضیه گرین برای $u^۲ + v^۲ \leq ۱$، باید مرز را در جهت مثلثاتی پرمایش کرد، جهت $\partial D$ نیز باید جهت مثلثاتی در صفحه $xy$ اتخاذ شود تا قضیهٔ استوکس برقرار گردد:

$$\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int_{\partial D}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

می‌توان در اینجا انتگرال سمت راست را محاسبه کرد ولی کار ساده‌تر این است که مجدداً قضیهٔ استوکس را این بار برای رویهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$، $z = ۰$ به‌کار گیریم که نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned}\int_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int\int_{x^۲+y^۲\leq ۱} (curl\vec{F} \cdot \vec{k})dA \\ &= \int\int_{x^۲+y^۲\leq ۱} ((۰ - ۰)\vec{i} + (۰ - ۰)\vec{j} + (۱ + ۱)\vec{k}) \cdot \vec{k}dA \\ &= \int\int_{x^۲+y^۲\leq ۱} ۲dA = ۲\pi\end{aligned}$$

برای بهره‌گیری کامل از قضیهٔ استوکس لازم است که آن را به "رویه‌های بزرگتر"، یعنی رویه‌هایی که نتوان (یا به آسانی نتوان) آنها را به صورت رویهٔ ساده پرمایش کرد تعمیم دهیم. زیرمجموعهٔ $D$ از $\mathbb{R}^۳$ را یک رویهٔ جهت‌پذیر می‌نامیم در صورتی $D = D_۱ \cup \cdots \cup D_k$ و شرایط زیر برقرار باشند:

(الف) هر $D_i$ یک رویهٔ ساده است.

(ب) دو $D_i$ متمایز فقط در مرز می‌توانند اشتراک داشته باشند و $D_i \cap D_j$ را می‌توان به صورت اجتماعی متناهی از تصاویر خم‌های هموار نوشت

(ج) هر قطعه خم مرزی $D_i$ با حداکثر یک $D_j$، $j \neq i$، مشترک است.

(د) برای $D_i$ ها می‌توان طوری جهت اختیار کرد که جهت قراردادی مرز مشترک بین $D_i$ و $D_j$ متضاد باشد.

در شکل ۳ دو نمونه رویهٔ جهت‌پذیر نمایش داده شده است. ۳ (الف) از چسباندن سه چنبره به هم به‌دست آمده است. از چنبرهٔ میانی دو قطعه و از هر یک چنبره‌های کناری یک قطعه بریده و در امتداد برش‌ها چنبره‌ها را به هم چسبانده‌ایم. به برقرار بودن شرط (د) توجه کنید. در شکل (ب) از استوانه افقی سه خم بسته $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ را بریده‌ایم به طوری که $D_۱$ دارای مرزی متشکل از پنج خم بستهٔ $\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳, \gamma_۴, \gamma_۵$ است. در امتداد $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ سه استوانهٔ دیگر به $D_۱$ چسبانده‌ایم. سه خم $\gamma_۱$، $\gamma_۲$ و $\gamma_۳$ جهت‌های متضاد از $D_i$ ها می‌گیرند. مرز $D = D_۱ \cup D_۲ \cup D_۳ \cup D_۴$ از پنج قطعهٔ $\gamma_۴$، $\gamma_۵$، $\gamma_۶$، $\gamma_۷$ و $\gamma_۸$ با جهت نمایش داده شده تشکیل شده است. در ۳ (الف) مرز $D$ تهی است. این نمونهٔ یک رویهٔ "جهت‌پذیر بسته" است.

شکل ۳

در شکل ۴ "نوار موبیوس" نمایش داده شده است که جهت‌پذیر نیست. اگر دو سر یک نوار کاغذ را پس از یک دو تاب دادن در فضا به هم بچسبانیم نوار موبیوس حاصل می‌شود. این رویه را نمی‌توان به صورت یک رویهٔ جهت‌پذیر نمایش داد.

شکل ۴

مثلاً اگر دو برش $cd$ و $ef$ را طبق شکل ۵ انجام دهیم و روی هر یک از رویه حاصل شده جهتی اختیار کنیم

شکل ۵

مشاهده می‌شود که بسته به جهت‌های اختیار شده، یکی از دو قطعهٔ مرزی $cd$ یا $ef$ جهت‌های متوافق کسب می‌کنند و دیگری جهت متضاد. نمود دیگر جهت‌ناپذیری یک رویه در $\mathbb{R}^3$ این است که نمی‌توان برای آن یک میدان برداری قائم واحد اختیار کرد که به طور پیوسته تغییر کند. مثلاً اگر در یک نقطهٔ دایرهٔ نقطه‌چین شکل ۴ یک قائم واحد بر رویه اختیار کنیم و آن را یک دو کامل در طول این خم بسته به طور پیوسته دنبال کنیم، در بازگشت به نقطهٔ آغازی جهت آن معکوس خواهد شد.

حال فرض کنید $D = D_1 \cup \cdots \cup D_k$ یک رویهٔ جهت‌پذیر باشد و برای $D_i$ ها جهت‌هایی طبق (د) اختیار کنید که خم‌های اشتراک جهت‌های متضاد کسب کنند. اگر فرمول استوکس را برای هر $D_i$ بنویسیم و طرف‌های متناظر را با هم جمع کنیم، در طرف راست (۱) $\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$ حاصل می‌شود و در طرف چپ کلیه مرزهای مشترک به دلیل جهت‌های متضاد حذف شده و تنها انتگرال $\int\vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای آن خم‌های مرزی باقی می‌ماند که متعلق به فقط یک قطعه هستند. این خم‌ها دقیقاً مرز $D$ را تشکیل می‌دهند. در ضمن اگر رویهٔ $D$ بسته باشد، همهٔ خم‌های مرزی مشترک هستند و مجموع انتگرال‌های سمت چپ صفر می‌شود. بدین ترتیب فرمول کلی استوکس به‌دست می‌آید:

(۴۰−۲) <u>قضیه استوکس</u> اگر $D$ یک رویه جهت‌پذیر با مرز $\partial D$ باشد و بردار قائم واحد و جهت $\partial D$ به طور سازگار با قرارداد انتخاب شده باشند، برای هر میدان برداری با مشتق‌های پاره‌ای پیوستهٔ $\vec{F}$ که

دامنهٔ آن شامل $D$ و $\partial D$ باشد داریم:

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_D curl\vec{F} \cdot \vec{n} dS \qquad (۲)$$

اگر رویه بسته نیز باشد، لزوماً:

$$\int\int_D curl\vec{F} \cdot \vec{n} dS = 0 \qquad (۳)$$

<u>مثال ۲</u> نمودار تابعی مشتق‌پذیر $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ استوانهٔ $x^2 + y^2 = 1$ را در خمی $\gamma$ قطع می‌کند. میدان برداری $\vec{F}(x, y, z) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. نشان دهید که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pm 2\pi$ مستقل از تابع خاص $f$.

دو تابع مشتق‌پذیر مختلف $f, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر بگیرید که اشتراک نمودارشان با $x^2 + y^2 = 1$ از یکدیگر مجزاست

شکل ٦

ناحیهٔ بین دو اشتراک روی سطح استوانه را $D$ می‌نامیم. در شکل ٦ داریم $\partial D = \beta \cup (-\alpha)$، که مقصود از $(-\alpha)$ بازپرمایش جهت برگردان $\alpha$ است. داریم $curl\vec{F} = \underline{0}$، پس $\int_\beta \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ ، یعنی همان طور که ادعا شده بود $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ مستقل از تابع خاص $f$ است. بنابراین برای محاسبه $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کافی است یک حالت خاص، مثلاً تابع ثابت $f(x, y) \equiv 0$ در نظر گرفته شود که اشتراک نمودار آن با استوانه، دایرهٔ واحد در صفحه $xy$ است. برای این دایره می‌دانیم که $\int_\gamma -ydx + xdy = \pm 2\pi$ بسته به این که جهت $\gamma$ مثلثاتی یا ضد مثلثاتی باشد.

(۴۰—۳) <u>کاربرد در وجود پتانسیل</u>

به عنوان یک کاربرد قضیهٔ گرین در صفحه دیدیم که هرگاه $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j}$ یک میدان برداری دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد که در مجموعه باز و همبند مسیری $U$ در $\mathbb{R}^2$ تعریف شده است و شرط لازم پایستگی $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial y}$ برقرار باشد، $\vec{F}$ پایسته است در صورتی که $U$ ویژگی هندسی اضافی

زیر را داشته باشد: برای هر خم سادهٔ بستهٔ قطعه قطعه هموار در $U$، ناحیه محصور توسط این خم به تمامی در $U$ واقع باشد. اکنون می‌توانیم با استفاده از قضیه استوکس تعمیم مناسبی برای این مطلب در $\mathbb{R}^۳$ ارائه کنیم. $U$ را یک مجموعهٔ باز و همبند مسیری در $\mathbb{R}^۳$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم میدان برداری $\vec{F}$، که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است، در $U$ تعریف شده است. شرطی لازم برای پایسته بودن $\vec{F}$ این است که:

$$curl\vec{F} = \underline{\circ} \qquad (۴)$$

این شرط برای پایسته بودن $\vec{F}$ کافی نیست زیرا که در مورد

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{-y}{x^۲+y^۲}\vec{i} + \frac{x}{x^۲+y^۲}\vec{j}$$

که در مجموعه باز و همبند مسیری $U = \mathbb{R}^۳ - \{$ محور $z\}$ تعریف شده است داریم $curl\vec{F} = \circ$ ولیکن انتگرال $\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$ روی دایرهٔ واحد در صفحه $xy$ صفر نیست. ویژگی هندسی اضافی مورد نیاز در اینجا بدین شرح است: برای هر خم بستهٔ ساده قطعه قطعه هموار $\gamma$ در $U$، رویه‌ای جهت‌پذیر $D$، کاملاً واقع شده در $U$ وجود داشته باشد که $\partial D = \gamma$.

در صورت احراز این شرط، $\int\int_D curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \circ$ نتیجه می‌دهد $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \circ$ برای هر خم سادهٔ بستهٔ قطعه قطعه هموار در $U$، پس $\vec{F}$ دارای پتانسیل است.

به عنوان مثال توجه کنید که $\mathbb{R}^۳ - \{(\circ,\circ,\circ)\}$ ویژگی مورد نظر را دارد زیرا که مثلاً برای هر خم بستهٔ ساده حول $\underline{\circ}$ در صفحه $xy$ می‌توان رویه‌ای در $z > \circ$ در نظر گرفت که $\gamma$ را به عنوان مرز دارد. مثلاً نیمکرهٔ شمالی این ویژگی را دارد.

(۴−۴۰) تعبیر $\underline{curl}$ فرض کنید $D_\rho$ یک گوی مسطح دو بعدی به شعاع $\rho$ و به مرکز نقطهٔ $P$ در $\mathbb{R}^۳$ است. $\vec{F}$ یک میدان برداری است با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته، که دامنهٔ آن شامل $D_\rho$ و مرز آن است. طبق فرمول استوکس داریم:

$$\int_{\partial D_\rho} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\int_{D_\rho} curl\vec{F}\cdot\vec{n}dS$$

با استفاده از قضیهٔ میانگین انتگرال، انتگرال سمت راست برابر می‌شود با $(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(Q)(\pi\rho^{2})$ که $Q$ نقطه‌ای در $D_\rho$ است. پس:

$$(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(Q)=\frac{\int_{\partial D_\rho}\vec{F}\cdot d\vec{r}}{\pi\rho^{2}} \qquad (۵)$$

حال $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ گردش $\vec{F}$ حول $\gamma$ نام دارد زیرا که به مفهومی "مجموع" مؤلفه‌های $\vec{F}$ در راستای مماس بر $\gamma$ است. بدین ترتیب طرف راست (۵) گردش متوسط $\vec{F}$ نسبت به مساحت را حول $P$ در صفحهٔ عمود بر $\vec{n}$ نمایش می‌دهد. وقتی $\rho\longrightarrow 0$، بنابر پیوستگی مشتق‌های پاره‌ای، $(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(Q)$ به $(curl\vec{F}\cdot\vec{n})(P)$ میل می‌کند. بدین ترتیب تعبیر زیر برای $curl\vec{F}$ حاصل می‌شود: $curl\vec{F}(P)$ برداری است که تصویر آن روی هر راستا برابر گردش لحظه‌ای $\vec{F}$ حول آن راستا نسبت به واحد مساحت است. چون حداکثر $curl\vec{F}\cdot\vec{n}(P)$ وقتی به‌دست می‌آید که $\vec{n}$ در راستای $curl\vec{F}$ باشد، امتداد $curl\vec{F}$ را محور چرخش لحظه‌ای $\vec{F}$ در نقطهٔ $P$ می‌نامند. به علاوه $\frac{1}{2}|curl\vec{F}|$ نیز معمولاً سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای این چرخش خوانده می‌شود. دلیل این نامگذاری مثال سادهٔ زیر است:

مثال میدان $\vec{F}(x,y,z)=-\omega y\vec{i}+\omega x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. این میدان نمایش دهندهٔ یک دوران حول محور $z$ با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega$ است. داریم:

$$curl\vec{F}=(0,0,2\omega)=(2\omega)\vec{k}$$

بدین ترتیب مشاهده می‌شود که امتداد $curl\vec{F}$ در واقع محور چرخش است و ضریب $\vec{k}$ دو برابر سرعت زاویه‌ای می‌باشد.

بدین ترتیب $curl\vec{F}(P)$ تمایل میدان $\vec{F}$ به حالت چرخشی حول $P$ را نمایش می‌دهد و امتداد $curl\vec{F}(P)$ محور بیشترین چرخش است. با این تعبیر می‌توان رابطهٔ اساسی $curl(grad\ f)=\underline{0}$ را بازبینی کرد. به‌یاد آورید که خطوط میدان $grad\ f$ همواره در جهت بیشترین صعود $f$ در حرکتند، پس خطوط میدان $grad\ f$ تمایلی به بازگشت به نقطهٔ شروع (چرخش) را ندارند که با $curl(grad\ f)=\underline{0}$ سازگار است.

از این تعبیر باید با احتیاط و دقت استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید:

<u>مثال</u> میدان $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{j}$ را در نظر می‌گیریم. این میدان روی صفحه $yz$ صفر است و خارج از آن دارای خطوط میدان موازی محور $y$ می‌باشد (شکل ۷ وضعیت میدان را در صفحه $xy$ نشان می‌دهد).

شکل ۷

به نظر نمی‌رسد هیچ گونه تمایلی به چرخش در این میدان وجود داشته باشد زیرا که خطوط میدان خارج از صفحه $yz$ خط راست هستند. ولیکن محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که $curl\vec{F} = \vec{k}$. چگونه باید این "تناقض" را توجیه کرد؟ یک راه توجیه این است که مشاهده کنیم در دو طرف صفحه $yz$ جهت میدان عوض می‌شود. این امر به سبب صفر شدن میدان روی صفحه $yz$ امکان‌پذیر است. می‌توان تصور کرد که در اینجا نوعی چرخش در جریان است که مسیر آن تا "بی‌نهایت" در امتداد محور $y$ ادامه دارد. راه دیگر این است که یک چرخهٔ سبک چهارپره‌ای را تصور کنیم که تحت تأثیر "میدان نیروی" $\vec{F} = x\vec{j}$ قرار دارد. مثلاً اگر این چرخه در نیمهٔ $x > 0$ قرار داشته باشد، نیرویی که به پره‌های راست آن وارد می‌آید بزرگتر از نیرویی است که در همان جهت به پره‌های سمت چپ وارد می‌شود، پس چرخه دور خود خواهد چرخید. بدین ترتیب شاید بهتر باشد به جای این که $curl\vec{F}$ را نمایشگر تمایل خود میدان $\vec{F}$ به چرخش فرض کنیم، آن را نمایشگر توان میدان $\vec{F}$ برای چرخاندن اشیاء سبکی که در معرض اثر آن قرار می‌گیرند تعبیر کنیم.