ضرب داخلی و هندسهٔ اقلیدسی در $I\!R^n$ (۱)

تاکنون مفاهیم ابتدایی نقطه، خط، صفحه و توازی را به $\mathbb{R}^n$ تعمیم داده‌ایم. در هندسهٔ مقدماتی طول و زاویه نیز نقش مهمی ایفا می‌کنند. هدف بعدی ما معرفی این مفاهیم در $\mathbb{R}^n$ و بحث پیرامون موضوع‌های هندسی وابسته به آنهاست. برای این کار رابطهٔ طول، زاویه و ضرب داخلی بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ را یادآوری می‌کنیم و خاطر نشان می‌سازیم که هر دو مفهوم "طول" و "زاویه" را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. از این رو در $\mathbb{R}^n$ ضرب داخلی را مبنای بحث قرار می‌دهیم.

اگر $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ دو بردار در $\mathbb{R}^۳$ باشند اغلب حاصل‌ضرب داخلی آنها، $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u \cdot v = |u||v| \cos \alpha \qquad (۱)$$

که $\alpha \in [۰, \pi]$ زاویه بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ است و $|\ |$ طول بردار را نمایش می‌دهد. با قرار دادن $\mathbf{u} = \mathbf{v}$، از (۱) نتیجه می‌شود که:

$$|u| = \sqrt{u \cdot u} \qquad (۲)$$

یعنی طول بردار را می‌توان برحسب ضرب داخلی بیان کرد. حال اگر $u \neq \underline{۰}$ و $v \neq \underline{۰}$، به طوری که زاویهٔ بین آنها، $\alpha \in [۰, \pi]$، معنی داشته باشد، از (۱) می‌توان نوشت:

$$\cos \alpha = \frac{u \cdot v}{\sqrt{u \cdot u}\sqrt{v \cdot v}} \qquad (۳)$$

تابع کسینوس روی بازهٔ $[0,\pi]$ یک به یک است و همهٔ مقادیر ممکن برای کسینوس، یعنی اعداد بازهٔ $[-1,1]$ را (یک بار) اتخاذ می‌کند، پس تابع معکوس $\cos^{-1}:[-1,1]\longrightarrow[0,\pi]$ وجود دارد و می‌توان نوشت:

$$\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}}\right) \quad (4)$$

بدین ترتیب مفهوم زاویهٔ بین دو بردار نیز به کمک (۴) از ضرب داخلی به‌دست می‌آید. حال اگر بتوان حاصل‌ضرب داخلی دو بردار را مستقل از "طول" و "زاویه" تعریف کرد، می‌توان با به‌کار گرفتن (۲) و (۴) به تعریف مفاهیم طول و زاویه رسید. در واقع در هندسهٔ تحلیلی دو بعدی و سه بعدی عبارتی جبری برای حاصل‌ضرب داخلی به‌دست می‌آید (به کمک قضیهٔ مثلثاتی "قاعده کسینوس") که این خواست را برآورده می‌کند. در $\mathbb{R}^2$ اگر $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ و $\mathbf{v}=(v_1,v_2)$ ثابت می‌شود که:

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2 \quad (5)$$

و نیز در $\mathbb{R}^3$، برای $\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)$ و $\mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)$:

$$u\cdot v=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3 \quad (6)$$

عبارت‌های جبری (۵) و (۶) تعریف زیر را در $\mathbb{R}^n$ القا می‌کنند:

(۴–۱) تعریف. برای $\mathbf{u}=(u_1,\dots,u_n)$ و $\mathbf{v}=(v_1,\dots,v_n)$، حاصل‌ضرب داخلی، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u\cdot v=u_1v_1+\cdots+u_nv_n$$

خواص زیر همه به سادگی از تعریف فوق نتیجه می‌شوند:

(۴–۲) خواص ابتدایی حاصل‌ضرب داخلی

(۴—۲—۱) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}$.

(۴—۲—۲) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})$ و $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{w})+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})$.

(۴—۲—۳) برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ و هر $r\in\mathbb{R}$، $(r\mathbf{u})\cdot\mathbf{v}=r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$ و $\mathbf{u}\cdot(r\mathbf{v})=r(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v})$.

(۴—۲—۴) برای هر $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\geq 0$ و $\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=0$ اگر و تنها اگر $\mathbf{u}=\underline{0}$.

با توجه به (۴—۲—۴) و با الهام از (۲)، طول $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$|u|=\sqrt{u\cdot u} \tag{۷}$$

تنها nـ تایی دارای طول صفر، $\underline{0}$ است. برای $|\mathbf{u}|$، علاوه بر طول، اصطلاح‌های نرم و قدرمطلق نیز به‌کار می‌رود. بعضی $|\mathbf{u}|$ را به $\|\mathbf{u}\|$ نمایش می‌دهند.

اکنون می‌خواهیم مفهوم زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ را نیز همانند (۴) تعریف کنیم. برای این کار باید اطمینان حاصل کرد که با تعریف ارائه شده در $\mathbb{R}^n$، مقدار عبارت $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$ همواره در بازهٔ $[-1,1]$ قرار دارد.

(۴—۳) نامساوی کوشی‌ـ شوارتس. برای هر $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$:

$$|u\cdot v|\leq|u||v|$$

به علاوه شرطی لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا باشند.

اثبات. نخست حالتی را در نظر بگیرید که $\mathbf{v}$ و $\mathbf{u}$ همراستا هستند. اگر یکی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر باشد که دو طرف نامساوی بالا صفر می‌شود، در غیر این صورت $\mathbf{v}=r\mathbf{u}$ برای عدد حقیقی مناسب r. در این صورت هر دو طرف نامساوی به $|r||\mathbf{u}|^2$ تبدیل می‌شود و تساوی برقرار است. حال فرض کنید $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا نباشند، بالاخص $\mathbf{u}\neq 0$ و $\mathbf{v}\neq 0$. nـ تایی $x\mathbf{u}+\mathbf{v}$، $x\in\mathbb{R}$، را در نظر بگیرید. داریم

$x\mathbf{u}+\mathbf{v}\neq ۰$ زیرا در غیر این صورت $\mathbf{v}=-x\mathbf{u}$ و همراستایی ایجاد می‌شود. پس:

$(xu+v)\cdot(xu+v)>۰$ (طبق ۴—۲—۴)

$(xu)\cdot(xu)+(xu)\cdot v+v\cdot(xu)+(v\cdot v)>۰$ (با استفاده مکرر از ۴—۲—۲)

$(u\cdot u)x^{۲}+۲(u\cdot v)x+(v\cdot v)$ (با استفاده مکرر از ۴—۲—۳ و ۴—۲—۱)

این نامساوی درجهٔ دوم نسبت به x برای هر عدد حقیقی x برقرار است، پس مبین عبارت منفی است:

$$(u\cdot v)^{۲}-(u\cdot u)(v\cdot v)<۰$$

یا

$$|u\cdot v|^{۲}<|u|^{۲}|v|^{۲}$$

که نامساوی مورد نظر است. □

حال با توجه به نامساوی ثبت شده داریم

$$-۱\leq\frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}}=\frac{u\cdot v}{|u||v|}\leq ۱$$

و یگانه مقدار واقع در $[۰,\pi]$ که کسینوس آن برابر $\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}}$ است زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ می‌نامیم:

$$\measuredangle(u,v)=\cos^{-۱}\frac{u\cdot v}{\sqrt{u\cdot u}\sqrt{v\cdot v}} \qquad (۸)$$

قضیهٔ زیر که از ابتدایی‌ترین قضایای هندسه است، از نامساوی کوشی‌ـ شوارتس نتیجه می‌شود:

(۴—۴) نامساوی مثلث برای هر $u,v\in\mathbb{R}^n$

$$|u+v|\leq|u|+|v|$$

شرط لازم و کافی برای برقراری تساوی این است که یکی از $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ مضربی نامنفی از دیگری باشد.

اثبات. کافی است نامساوی برای مجذور دو طرف ثابت شود، یعنی:

$$|u+v|^{۲}\leq|u|^{۲}+|v|^{۲}+۲|u||v|$$

که معادل است با

$$(u+v)\cdot(u+v) \leq (u\cdot u)+(v\cdot v)+۲|u||v|$$

و پس از ساده کردن:

$$u\cdot v \leq |u||v|$$

$$|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \leq |u||v| \quad \text{(طبق نتیجه نامساوی کوشی‌ـ شوارتس)}$$

اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ صفر باشد (که در این صورت یکی مضرب صفر از دیگری است) تساوی برقرار می‌شود، و اگر هر دو ناصفر باشند، رابطهٔ بالا معادل است با:

$$\cos\measuredangle(u,v) \leq ۱$$

که همواره برقرار است. تساوی در صورتی حاصل می‌شود که $\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v}) = ۱$، یعنی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ همراستا و هم‌جهت باشند. □

برای دو عنصر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ از $\mathbb{R}^n$ می‌نویسیم $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، و می‌گوییم $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v}$ عمود است در صورتی که $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$. قضیهٔ فیثاغورس که پایهٔ هندسهٔ اقلیدسی است در $\mathbb{R}^n$ با تعاریف طول و زاویهٔ ذکر شده برقرار است:

(۴—۵) قضیه فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$، آنگاه:

$$|u+v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲$$

اثبات. عبارت بالا را می‌توان به صورت

$$(u+v)\cdot(u+v) = (u\cdot u)+(v\cdot v)$$

نوشت که با توجه به $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$ برقرار است. □

توجه کنید که با همین استدلال (یا جایگزینی $-\mathbf{v}$ به جای $\mathbf{v}$)، رابطهٔ $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^۲ = |\mathbf{u}|^۲ + |\mathbf{v}|^۲$ نیز تحت فرض $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = ۰$ برقرار است. در $\mathbb{R}^n$ نیز، مانند $\mathbb{R}^۲$، قضیهٔ فیثاغورس به شکل $|\mathbf{u}-\mathbf{v}|^۲ = |\mathbf{u}|^۲ + |\mathbf{v}|^۲$ حالت خاص قاعدهٔ کسینوس است که می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$|u-v|^۲ = |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \qquad v \neq \underline{۰}, u \neq \underline{۰} \text{ برای هر } \qquad (۹)$$

این نیز از محاسبه‌ای مشابه محاسبهٔ بالا با استفاده از (۸) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |u-v|^۲ &= (u-v)\cdot(u-v) \\ &= |u|^۲ + |v|^۲ - ۲(u\cdot v) \\ &= |u|^۲ + |v|^۲ - ۲|u||v|\cos\measuredangle(u,v) \quad (\text{طبق } (۸)) \end{aligned}$$

به طور کلی، هرگاه $\mathbf{x} = (x_۱,\ldots,x_n)$ و $\mathbf{y} = (y_۱,\ldots,y_n)$ دو عنصر $\mathbb{R}^n$ باشند، فاصلهٔ $\mathbf{x}$ از $\mathbf{y}$، که گاهی به $d(\mathbf{x},\mathbf{y})$ نمایش داده می‌شود، برابر $|\mathbf{x}-\mathbf{y}|$ تعریف می‌شود. این تعریف با آنچه از بردارها در $\mathbb{R}^۲$ و $\mathbb{R}^۳$ می‌دانیم سازگار است. قضیه‌های هندسی اخیر را می‌توانیم با توجه به این تعریف به صورت‌های آشناتری نیز ارائه کنیم:

(۴ــ۶) نامساوی مثلث. برای $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$:

$$|y-z| \leq |y-x| + |x-z|$$

(۴ــ۷) قضیهٔ فیثاغورس. هرگاه برای $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داشته باشیم $(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \perp (\mathbf{x}-\mathbf{z})$، آنگاه:

$$|y-z|^۲ = |y-x|^۲ + |z-x|^۲$$

(۴ــ۸) قاعدهٔ کسینوس. برای هر $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}$ در $\mathbb{R}^n$ داریم:

$$|y-z|^۲ = |y-x|^۲ + |z-x|^۲ - ۲|y-x||z-x|\cos\measuredangle(y-x, z-x)$$

هر یک از این روابط با جایگزینی در رابطهٔ متناظر به‌دست می‌آید. در (۴–۶) بنویسید $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$، آنگاه $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$. در مورد (۴–۷) و (۴–۸)، می‌نویسیم $\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$ و $\mathbf{v} = \mathbf{z} - \mathbf{x}$، آنگاه $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{y} - \mathbf{z}$.

(۴–۹) تصویر قائم روی یک راستا. یکی از موارد استفاده مهم ضرب داخلی در $\mathbb{R}^2$ و $\mathbb{R}^3$ محاسبهٔ تصویر قائم یک بردار روی راستایی است که یک بردار ناصفر دیگر پدید می‌آورد (شکل ۱).

شکل ۱

اگر $\mathbf{v} \neq \underline{0}$ و $\mathbf{u}$ در $\mathbb{R}^3$ باشند، $\mathbf{u}'$، تصویر قائم $\mathbf{u}$ بر راستای $\mathbf{v}$، برداری است که طول آن برابر $|\mathbf{u}||\cos\measuredangle(\mathbf{u},\mathbf{v})|$ است (در حالتی که $\mathbf{u} = \underline{0}$، این طول برابر صفر در نظر گرفته می‌شود هرچند که زاویهٔ بین $\mathbf{u},\mathbf{v}$ تعریف نشده است)، $\mathbf{u}'$ مضربی از $\mathbf{v}$ است، $\mathbf{u}' = r\mathbf{u}$، و علامت r با علامت کسینوس زاویهٔ بین $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ یکی است. بدین ترتیب اگر $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{u}|}$ بردار واحد در جهت $\mathbf{v}$ باشد، می‌توان نوشت:

$$u' = |u| \cos\measuredangle(u,v)\frac{v}{|v|} \tag{10}$$

یا معادلاً:

$$u' = \frac{u \cdot v}{|v|^2} v \tag{11}$$

با توجه به این که عبارت‌های سمت راست (۱۱)همه در $\mathbb{R}^n$ معنی دارند، می‌توانیم تصویر قائم $\mathbf{u}$ بر $\mathbf{v} \neq \underline{0}$ در $\mathbb{R}^n$ را نیز به صورت (۱۱) تعریف کنیم. در حالت خاصی که $\mathbf{v}$ یک بردار واحد باشد:

$$u' = (u \cdot v)v \quad \text{اگر} \quad |v| = 1 \tag{12}$$

مثال (پایهٔ متداول $\mathbb{R}^n$). $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ را مانند مثال صفحه ۸ جلسه قبل در نظر بگیرید، یعنی

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

هر $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ را می‌توان به صورت:

$$x = x_۱ e_۱ + \cdots + x_n e_n$$

نوشت. در واقع $x_i \mathbf{e}_i$ تصویر قائم $\mathbf{x}$ بر راستای $\mathbf{e}_i$ (محور i ام) است:

$$(x \cdot e_i) e_i = x_i e_i$$

پس می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{i=۱}^{n} (x \cdot e_i) e_i \qquad (۱۳)$$

مجموعه $\{\mathbf{e}_۱, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ را پایه متداول $\mathbb{R}^n$ می‌نامند.