آنالیز برداری (۱)

همان طور که قبلاً ذکر شد هدف ما اکنون بررسی انتگرال روی مجموعه هموار خمیده یا دارای مرز خمیده است. دستاورد مهم این بررسی سه قضیه به نام‌های قضیهٔ گرین، قضیهٔ استوکس و قضیهٔ دیورژانس خواهد بود که هر یک به نوعی انتگرال روی یک مجموعهٔ را به انتگرال یک بعد پایین‌تر روی مرز آن مرتبط می‌سازد. از دیدگاهی، هر سه قضیه، تعمیم‌های قضیهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال هستند، و در واقع عنصر اصلی اثبات هر یک از آنها همان قضیه اساسی است. در این سیر نخست به بحث پیرامون قضیهٔ گرین می‌پردازیم.

فرض کنید D یک ناحیه در صفحه است که محصور به یک یا چند (تعدادی متناهی) تصویر سه خم قطعه قطعه هموار می‌باشد. در شکل ۱ (الف) مرز ناحیهٔ D تصویر، یک خم، در شکل ۱ (ب)، مرز ناحیهٔ D متشکل از تصویر خم قطعه قطعه هموار است. ناحیهٔ D قسمت هاشورزدهٔ شکل است. یادآوری می‌کنیم که خم پیوسته $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ را قطعه قطعه هموار می‌نامیم در صورتی که افراز $a = t_۰ < t_۱ < \ldots < t_p = b$ وجود داشته باشد به‌طوری که تحدید γ به هر $[t_{i-۱}, t_i]$ یک خم هموار باشد. در نقاط انتهایی $[t_{i-۱}, t_i]$ مشتق یک‌طرفه منظور می‌کنیم. اجتماع تصاویر خمهای مرزی را به ∂D نمایش می‌دهیم. هر نقطهٔ $\gamma(t_i)$ یک "گوشه" ∂D است.

شکل ۱

در نقاط غیر گوشه‌ای مرز D دو انتخاب برای مماس واحد $\vec{T}$ وجود دارد. <u>جهت قراردادی ∂D</u>، یعنی انتخاب مماس واحد، را به‌صورت زیر منظور می‌کنیم. در هر نقطهٔ غیرگوشه‌ای $\vec{T}$ به گونه‌ای انتخاب می‌شود که اگر به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲}$ در جهت مثلثاتی گردش کند به سوی درون D قرار گیرد. بدین ترتیب جهت ∂D در شکل ۱ (الف) جهت مثلثاتی است و در شکل ۱ (ب)،

خم بیرونی در جهت مثلثاتی و خمهای داخلی در جهت عقربهٔ ساعت جهت داده می‌شوند. در زیر همواره ∂D با جهت قراردادی موردنظر است.

(۳۹—۱) قضیه گرین D ناحیه‌ای در صفحه است که مرز آن ∂D از تعدادی متناهی تصویر خمهای قطعه قطعه هموار تشکیل شده است و $\vec{F} = (F_۱, F_۲)$ یک میدان برداری $C^۱$ که دامنهٔ تعریف آن شامل D و ∂D است.

در این‌صورت داریم

$$\int_{\partial D} \vec{F}.d\vec{r} = \int_D \int (\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y}) dA_{x,y} \qquad (۱)$$

قبل از پرداختن به اثبات این قضیه، تعدادی از کاربردهای آن را بررسی می‌کنیم. از نظر محاسباتی قضیهٔ گرین می‌تواند در بسیاری موارد کارساز باشد. در عمل گاهی طرف راست فرمول (۱) و گاهی طرف چپ از نظر محاسباتی ساده‌ترند و در هر صورت می‌توان از قضیهٔ گرین بهره جست.

کاربرد ۱ با انتخاب مناسب مؤلفه‌های $\vec{F}$، می‌توان فرمول‌های متعددی برای مساحت ناحیهٔ D برحسب انتگرال روی خم ∂D پیدا کرد. مثلاً با گرفتن $\vec{F} = \frac{۱}{۲}(-y, x)$، داریم $\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y} = ۱$، پس

$$\text{مساحت } D = \frac{۱}{۲} \int_{\partial D} (-y dx + x dy) \qquad (۲)$$

کاربرد ۲ (مسأله پتانسیل در صفحه) قبلاً دیدیم که اگر $\vec{F} = F_۱\vec{i} + F_۲\vec{j}$ یک میدان گرادیان در ناحیه‌ای U از صفحه xy باشد، لزوماً داریم:

$$\frac{\partial F_۱}{\partial y} = \frac{\partial F_۲}{\partial x} \qquad (۳)$$

اکنون ملاحظه خواهیم کرد که اگر U واجد شرط هندسی مناسبی باشد، شرط (۳) برای این که $\vec{F}$ به شکل گرادیان باشد (معادلاً $\vec{F}$ پایسته باشد) کفایت می‌کند:

(۳۹—۲) قضیه فرض کنید مجموعهٔ باز و همبند مسیری U در صفحه واجد شرط هندسی زیر باشد: برای هر خم بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار در U، ناحیه درون خم به تمامی در U قرار دارد. در این

صورت اگر میدان دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوستهٔ $\vec{F} = F_۱\vec{i} + F_۲\vec{j}$ که در U تعریف شده است حایز شرط (۳) باشد، $\vec{F}$ پایسته است.
شرط ذکر شده بدین صورت بیان می‌شود که "ناحیهٔ U فاقد حفره است". در شکل (۲ الف) یک ناحیهٔ فاقد حفره و در شکل (۲ ب) یک ناحیهٔ حفره دار دیده می‌شود. توجه کنید که برای ناحیهٔ

شکل ۲

حفره‌دار درون یک خم بستهٔ ساده حول حفره به تمامی در U قرار ندارد.

اثبات قضیه به سادگی از قضیهٔ گرین به‌دست می‌آید. قبلاً دیده‌ایم که شرطی لازم و کافی برای پایسته بودن $\vec{F}$ در U این است که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای هر خم بستهٔ ساده در U صفر شود. حال اگر شرط هندسی ذکر شده برقرار باشد، برای هر خم بستهٔ ساده γ در U، ناحیهٔ درون آن D به تمامی در U، قلمرو $\vec{F}$، قرار دارد، و می‌توان از قضیهٔ گرین و اینکه $\frac{\partial F_۲}{\partial x} - \frac{\partial F_۱}{\partial y} = ۰$ نتیجه گرفت که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = ۰$، پس حکم نتیجه می‌شود. $\Box$

کاربرد ۳ فرض کنید γ، $\gamma_۱$، …، γ_k خمهای بستهٔ ساده قطعه قطعه هموار و همجهت باشند که تصویرهای $\gamma_۱,\ldots,\gamma_k$ دوبه‌دو متخارج بوده و همگی در درون تصویر γ قرار داشته باشند (شکل ۳). اگر میدان برداری $\vec{F}$ در سراسر ناحیهٔ بین خمهای γ_i و γ تعریف شده، $C^۱$ باشد، و داشته باشیم $\frac{\partial F_۲}{\partial x} = \frac{\partial F_۱}{\partial y}$، آنگاه:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \sum_{i=۱}^{k}\int_{\gamma_i}\vec{F}.d\vec{r} \qquad (۴)$$

در شکل (۳) ناحیهٔ بین γ_iها و γ با نقطه‌چین مشخص شده است. برای اثبات (۴)، D را ناحیهٔ بین γ_iها و γ_i می‌گیریم. اگر ∂D (اجتماع تصویر γ_iها و γ) را با جهت قراردادی منظور کنیم، طبق قضیهٔ گرین داریم:

$$\left(\int_{\partial D}\vec{F}.d\vec{r}\right) = ۰ \qquad (۵)$$

ولی ∂D از اجتماع تصویر γ (با جهت مثلثلاتی) و تصاویر γ_iها (با جهت عقربهٔ ساعت) تشکیل شده است. بنابراین اگر γ_iها و γ را همجهت بگیریم (یعنی یا γ_iها را تغییر جهت دهیم، یا γ را)، از (۵)

رابطه (۴) حاصل می‌شود زیرا که تعویض جهت علامت مقدار انتگرال می‌شود.

بدین ترتیب هر چند شرط (۳)، به تنهایی، ممکن است دلالت بر پایسته بودن $\vec{F}$ نکند، ولیکن مقدار انتگرال $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای هر دو خم سادهٔ بسته‌ای که ناحیهٔ بین آنها در دامنهٔ تعریف قرار داشته باشد برابر است. نمونهٔ مهمی از این کاربرد، برای $\vec{F} = (\frac{-y}{x^۲+y^۲}, \frac{x}{x^۲+y^۲})$ ظاهر می‌شود که شرط (۳) برای آن برقرار است. دیده‌ایم که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای هر دایرهٔ شعاع R به مرکز $\underline{\circ}$ که یک بار در جهت مثلثاتی طی شود برابر (۲π) است. نتیجه این که اگر به جای γ، هر خم بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار که یک بار در جهت مثلثاتی حول نقطه $\underline{\circ}$ می‌چرخد نیز برابر ۲π می‌باشد زیرا که میدان $\vec{F}$ در ناحیهٔ بین این خم در یک دایرهٔ شعاع مناسب تعریف شده است. در واقع اگر خم بستهٔ γ ساده نباشد، یعنی خود را قطع کند، با تجزیه γ به چند قطعه بستهٔ ساده مشاهده می‌شود که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برابر $(۲k\pi)$ است که k تعداد دفعات چرخش γ حول $\underline{\circ}$ در جهت مثلثاتی است (برای جهت عقربه ساعت، k منفی می‌شود). از این رو، تعریف دقیقی برای "دفعات گردش" خم بستهٔ γ، که در $\mathbb{R}^۲ - \{\underline{\circ}\}$ قرار دارد، حول $\underline{\circ}$ به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$(\text{شاخص گردش } \gamma \text{ حول } \underline{\circ})\, I_\gamma(\underline{\circ}) = (\frac{۱}{۲\pi})\int_\gamma (\frac{-y}{x^۲+y^۲}dx + \frac{x}{x^۲+y^۲}dy) \qquad (٦)$$

طبیعی است که اگر به جای $\underline{\circ}$، نقطهٔ دیگری p در صفحه در نظر بگیریم، با انتقال مختصات می‌توان به طور مشابه $I_\gamma(p)$ را تعریف کرد. در شکل ۴ چند نمونه نمایش داده شده است.

شکل ۴

(۳۹–۳)<u>اثبات قضیه گرین</u> نخست قضیه گرین را برای یک مستطیل ثابت می‌کنیم. فرض کنید:

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$$

∂D از چهار پاره‌خط $\gamma_۱, \gamma_۲, \gamma_۳, \gamma_۴$، به صورت مشخص شده در شکل (۵) تشکیل شده است.

شکل ۵

خم‌های مرزی را می‌توان به شکل زیر پرمایش کرد:

$$\gamma_1(t)=(t,c), a\leq t\leq b \quad , \quad \gamma_3(t)=(a+b-t,d), a\leq t\leq b$$

$$\gamma_2(t)=(b,t), c\leq t\leq d \quad , \quad \gamma_4(t)=(a,c+d-t), c\leq t\leq d$$

برای محاسبه $\int\int_D(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y})dA$ (طرف راست (۱))، دو انتگرال دوگانه جداگانه محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x}dA &= \int_c^d\int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial x}dxdy\\ &= \int_c^d [F_2(b,y)-F_2(a,y)]dy\\ &= \int_c^d F_2(b,y)dy-\int_c^d F_2(a,y)dy\end{aligned}$$

از طرفی دیگر:

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c^d(F_1\frac{dx}{dt}+F_2\frac{dy}{dt})dt$$

در امتداد γ_2، $x=b$ ثابت است، پس $\frac{dx}{dt}=0$، و $\frac{dy}{dt}=1$، پس:

$$\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c^d F_2(b,t)dt=\int_c^d F_2(b,y)dy$$

و نیز مشابهاً می‌بینیم که $\int_{\gamma_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_c^d F_2(a,y)dy$، پس

$$\int\int_D\frac{\partial F_2}{\partial x}dA=\int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\gamma_4}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

به همین ترتیب می‌توان دید که $-\int\int_D\frac{\partial F_1}{\partial y}dA=\int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ و اثبات قضیهٔ گرین برای مستطیل کامل می‌شود. توجه کنید که در این اثبات عنصر اصلی، استفاده از قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است.

در گام بعد، ناحیه‌هایی را در نظر می‌گیریم که مرز آنها اجتماع پاره‌خط‌هایی به موازات محورهای x و y است. این ناحیه‌ها را می‌توان با رسم خطوطی به موازات دو محور به اجتماع مستطیل‌هایی از نوع بالا تجزیه کرد که فقط در مرز اشتراک دارند (شکل ٦)

شکل ٦

ناحیه D به صورت اجتماعی متناهی از مستطیل‌های $D_1, \ldots, D_k$ نوشته می‌شود که برای هر یک قضیهٔ گرین ثابت شده است. در جمع زدن $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ برای مرزهای این مستطیل‌ها، مشاهده می‌کنیم که پاره‌خط‌های واقع در داخل D دوبار در جهت‌های مخالف طی می‌شوند، پس اثر آنها در مجموع صفر است در حالی که پاره‌خط‌های تشکیل‌دهندهٔ ∂D فقط یک بار ظاهر می‌شوند و در مجموع، $\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را می‌سازند. بدین ترتیب قضیهٔ گرین برای این نوع نواحی ثابت می‌شود.

شکل ۷

بالاخره در حالت کلی، با رسم خطوط راستی موازی دو محور، افرازی از D به‌دست می‌آوریم و تقریبی از این ناحیه که به شکل گام بالا است (شکل ۷). می‌توان نشان داد (با جزئیاتی که در اینجا مطرح نخواهد شد) که باظریفتر کردن افراز، انتگرال دوگانه روی ناحیهٔ تقریب D به انتگرال دوگانه روی D میل می‌کند و نیز انتگرال روی خم مرزی به انتگرال روی مرز D میل خواهد کرد، و بدین ترتیب اثبات قضیهٔ گرین در حالت کلی به‌دست می‌آید.