انتگرال روی خم و رویه (۳)

در ادامه بحث انتگرال روی اجسام خمیده، اکنون مفهوم انتگرال یک میدان برداری 'یا فرم دیفرانسیل' را روی رویه بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\varphi : W \to \mathbb{R}^۳$، $\vec{r} = \varphi(u,v)$، یک رویه هموار باشد و W یک ناحیهٔ مجاز انتگرالگیری در $\mathbb{R}^۲$. طبق معمول نقاط W را به $W = (u,v)$، عنصر سطح $|\varphi_n \times \varphi_v|dudv$، را به dS، و قائم واحد قراردادی $\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ را به $\vec{n}$ نمایش می‌دهیم. گاهی $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)dudv = \vec{n}dS$ را به $d\vec{S}$ نیز نمایش می‌دهند. فرض کنید $\vec{F} = (F_۱, F_۲, F_۳)$ یک میدان برداری پیوسته باشد که دامنهٔ آن شامل تصویر φ، یعنی $\varphi(W)$، است. در این‌صورت تعریف می‌کنیم:

$$\int\int_\varphi \vec{F}.d\vec{S} = \int_\varphi\int (\vec{F}.\vec{n})dS \qquad (۱)$$

توجه کنید به ازای هر $(u,v) \in W$، $\vec{F}(\varphi(u,v)).\vec{n}((u,v))$ تعریف شده است، پس طرف راست بالا یک انتگرال چگالی به مفهوم عادی می‌باشد. از طرفی دیگر چون $\vec{n}$ معرف جهت رویه است، $\vec{F}.\vec{n}$ تحت تعویض متغیر جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد، پس (۱) نیز تحت تعویض متغیر جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد.

تعبیرفیزیکی زیر در مورد انتگرال (۱) منشاء کاربردهای بسیاری است. $\vec{F}$ را یک میدان نیرو فرض کنید و $\varphi(W)$ را یک لایهٔ بسیار نزدیک در فضای سه‌بعدی تصور کنید که در معرض این نیرو قرار دارد. مقدار $\vec{F}.\vec{n}$ برابر مؤلفه $\vec{F}$ در جهت عمود قراردادی بر لایه است. انتگرال $\vec{F}.\vec{n}$ نسبت به dS روی این لایه نمایشگر کل شار گذرا از لایه محسوب می‌شود.

مثال ۱ میدان واحد قائم $\vec{F} = \vec{k}$ در $\mathbb{R}^۳$ را در نظر بگیرید. شار گذرا از نیمکرهٔ $x^۲ + y^۲ + z^۲ = R^۲$، $z \geq ۰$، را محاسبه کنید اگر قائم واحد $\vec{n}$ با مؤلفه سوم مثبت برای نیمکره منظور شود.

در نقطهٔ (x,y,z) از نیمکره داریم $\vec{n} = (\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R})$، باید نماد دیگر $\vec{n} = \frac{x}{R}\vec{i} + \frac{y}{R}\vec{j} + \frac{z}{R}\vec{k}$. پس $\vec{F}.\vec{n} = \frac{z}{R}$ و یا به انتگرال $\int\int \frac{z}{R} dS$ را روی نیمکره محاسبه کنیم. در مختصات کروی داریم:

$$z = R\cos\varphi$$

$$dS = R^{۲} \sin\varphi d\varphi d\theta$$

پس

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{۲\pi} \int_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} (\cos\varphi)(R^{۲}\sin\varphi) d\varphi d\theta &= (۲\pi R^{۲})(\tfrac{۱}{۲})\sin^{۲}\varphi \,\Big|_{\circ}^{\frac{\pi}{۲}} \\ &= \pi R^{۲}\end{aligned}$$

عبارت داخل انتگرال در طرف راست (۱) را می‌توان به صورتهای دیگری نیز بازنویسی کرد. از آنجا که $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_n \times \vec{r}_v|}$، داریم

$$\vec{n} dS = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv \qquad (۲)$$

پس

$$\int_{\varphi}\int \vec{F}.d\vec{S} = \int_{W}\int \vec{F}.(\vec{r}_v \times \vec{r}_v) du dv \qquad (۳)$$

حال اگر بنویسیم $\vec{r} = (x,y,z)$، داریم

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right)$$

که طبق معمول مقصود از نماد y_u مشتق پاره‌ای y نسبت به u، یعنی $\frac{\partial y}{\partial u}$، است و به همین ترتیب برای سایر درایه‌های دترمینان‌های بالا. پس برای $\vec{F} = (F_{۱}, F_{۲}, F_{۳})$، نتیجه می‌شود که:

$$\int_{\varphi}\int \vec{F}.d\vec{S} = \int_{W}\int \left[F_{۱} \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} + F_{۲} \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} + F_{۳} \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right] du dv \qquad (۴)$$

طرف راست (۴) روش محاسبه صریح این نوع انتگرال را برحسب پرمایش φ عرضه می‌کند. از آنجا که تحت تعویض پارامتر جهت‌نگهدار مقدار این انتگرال تغییر نمی‌کند، مطلوب است که عبارت سمت راست (۴) به‌صورتی مستقل از پارامترهای خاص (u,v) نوشته شود. توجه کنید که دترمینان $\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}$ دترمینان ماتریس مشتقهای y و z نسبت به u و v است. به جای $\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} du dv$ گاهی

می‌نویسیم $dydz$. و به همین ترتیب $dzdx$ و $dxdy$ (به ترتیب توجه کنید) را جایگزین عبارتهای متناظر کرده و (۴) را به‌صورت زیر نیز می‌نویسیم:

$$\int_{\varphi(W)}\int \vec{F}.d\vec{S} = \int_{\varphi}\int F_{1}dydz + F_{2}dzdx + F_{3}dxdy \qquad (5)$$

مقصود از عبارت سمت راست این است که نسبت به هر پرمایش مجاز φ با جایگزین مناسب برای $dydz$، $dzdx$ و $dxdy$ برحسب پارامترهای ذیربط می‌توان انتگرال را محاسبه کرد.

<u>مثال ۲</u> انتگرال مثال (۱) را به روش دیگری محاسبه می‌کنیم. داریم $F_{1} = F_{2} = 0$ و $F_{3} = 1$، پس برای نیمکره شمالی H، به شعاع R، داریم:

$$\int_{H}\int \vec{k}.d\vec{S} = \int_{H}\int (1)dxdy$$

حال می‌توان نیمکرهٔ شمالی را به‌صورت نمودار تابعی برحسب x و y، یعنی $z = \sqrt{R^{2} - x^{2} - y^{2}}$ پرمایش کرد که ضمناً دیده‌ایم مؤلفه سوم $\vec{r_x} \times \vec{r_y}$ همواره مثبت است پس جهت رویه منظور شده در مثال (۱) را دارد. پس:

$$\int_{H}\int dxdy = \int_{x^{2}+y^{2}\leq R^{2}}\int dxdy = \pi R^{2}$$

در باقیماندهٔ این بخش دو مفهوم 'دیوژرانس' و 'چرخه' را معرفی می‌کنیم که همراه با گرادیان نقش اساسی در قضایای مهم انتگرال روی خمها و رویه‌ها دارند. فرض کنید U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ است و $\vec{F} = (F_{1}, \ldots, F_{n})$ یک میدان برداری C^{1} تعریف شده روی U. <u>دیورژانس</u> $\vec{F}$، که به $div\vec{F}$، نمایش داده می‌شود، تابع زیر است:

$$div\vec{F} = \frac{\partial F_{1}}{\partial x_{1}} \ldots + \frac{\partial F_{n}}{\partial x_{n}} \qquad (6)$$

اگر $\vec{F}$ تابعی از U به $\mathbb{R}^n$ تصور کنیم، $div\vec{F}$ در واقع مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس ژاکوبی $\vec{F}$ است. مجموع عناصر قطری یک ماتریس مربعی، مانند دترمینان، از خواص مهمی برخوردار است. در بخشهای آینده خواهیم دید که دیورژانس $\vec{F}$ نوعی شاخص وضعیت میدان $\vec{F}$ از نظر انبساط یا انقباض

است. مثبت بودن $div\vec{F}$ در یک نقطه نوعی انبساط حول آن نقطه، یا دور شدن پیکانهای میدان حول آن نقطه را نشان می‌دهد، و بالعکس منفی بودن $div\vec{F}$ دالّ بر تقارب پیکانها یا انقباض است.

بدین ترتیب دیورژانس به هر میدان برداری C^1 روی U یک تابع پیوسته $div\vec{F} : U \to \mathbb{R}$ نسبت می‌دهد، در حالی که گرادیان، به هر تابع C^1، $f : U \to \mathbb{R}$ یک میدان برداری پیوسته $gradf = \nabla f$ روی U منسوب می‌کند.

در حالت $n = 3$، یعنی وقتی که U زیرمجموعه بازی از $\mathbb{R}^3$ باشد، یک عملگر دیگر روی میدانهای برداری مجموعهٔ گرادیان و دیورژانس را کامل می‌کند. این عملگر که چرخه نام دارد و به نمادهای $curl$ یا rot نمایش داده می‌شود، به هر میدان بردارای مشتقپذیر $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ روی U میدان دیگری به شکل زیر نسبت می‌دهد:

$$curl\vec{F} = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \qquad (۷)$$

در بخشهای آینده خواهیم دید که $curl\vec{F}$ به اعتباری تقریب $\vec{F}$ با یک میدان چرخشی است، $|curl\vec{F}|$ مقدار چرخش و راستای $curl\vec{F}$ (چنانچه $curl\vec{F}$ صفر نباشد) محور این چرخش است.

دو حکم کلیدی زیر ارتباط مهمی را میان سه عملگر $grad$، $curl$ و div بیان می‌کنند.

(۱ــ۳۸) (الف) اگر f تابعی C^2 باشد داریم:

$$curl(grad f) = \underline{0} \qquad (۸)$$

(ب) اگر $\vec{F}$ یک میدان C^2 باشد، داریم

$$div(curl\vec{F}) = 0 \qquad (۹)$$

برهان اثبات (۸) و (۹) سرراست است ولی مشاهده محاسبات لازم حایز اهمیت است:

$$\begin{aligned} curl(grad f) &= curl(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) \\ &= (\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}) \end{aligned}$$

از آنجا که f تابعی $C^۲$، یعنی دارای مشتقهای پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته، فرض شده است، هر سه مؤلفه بالا صفر هستند. به همین ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} div(curl\vec{F}) &= div(\frac{\partial F_۳}{\partial y}-\frac{\partial F_۲}{\partial z},\frac{\partial F_۱}{\partial z}-\frac{\partial F_۳}{\partial x},\frac{\partial F_۲}{\partial x}-\frac{\partial F_۱}{\partial y}) \\ &= \frac{\partial^۲ F_۳}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^۲ F_۲}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^۲ F_۱}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^۲ F_۳}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^۲ F_۲}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^۲ F_۱}{\partial z\partial y} \end{aligned}$$

و در اینجا نیز چون مولفه‌های $\vec{F}$ دارای مشتقهای پاره‌ای پیوسته مرتبه دوم فرض شده‌اند، شش جملهٔ بالا دوبه‌دو حذف می‌شوند و حکم نتیجه می‌شود.
□

توجه کنید که هر دو حکم بالا دقیقاً بیانگر مجاز بودن تعویض ترتیب مشتقگیری برای تابعهای $C^۲$ هستند. می‌توان تعبیری شهودی از (۸) و (۹) ارائه داد. در مورد (۸)، میدان گرادیان میدانی است که تمایل گردشی ندارد زیرا که خطوط میدان همواره در جهت بیشترین افزایش تابع f حرکت می‌کنند. بنابراین $curl(grad f)$، که میزان چرخش میدان $grad f$ است، صفر می‌شود. به همین ترتیب، $curl\vec{F}$ حالت چرخشی دارد، یعنی نه منبسط کننده و نه منقبض کننده است، بنابراین دیورژانس آن صفر می‌شود.

نماد زیر برای به یاد ماندن سه عملگر ذکر شده رویه مفید واقع می‌شود و به هر حال خلاصه‌نویسی سودمندی است. اگر ∇ را به‌طور نمادین به‌صورت

$$\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}) \qquad (۱۰)$$

بنویسیم، گرادیان f از نوشتن f در جوار مولفه‌های ∇ به‌دست می‌آید، یعنی:

$$\nabla f=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}) \qquad (۱۱)$$

اگر $\vec{F}=(F_۱,F_۲,F_۳)$ یک میدان باشد، ضرب داخلی نمادین ∇ و $\vec{F}$ برابر دیورژانس می‌شود:

$$\nabla.\vec{F}=\frac{\partial F_۱}{\partial x}+\frac{\partial F_۲}{\partial y}+\frac{\partial F_۳}{\partial z} \qquad (۱۲)$$

و بالاخره ضرب خارجی نمادین ∇ و $\vec{F}$، میدان $curl\vec{F}$ را به‌دست می‌دهد:

$$\nabla\times\vec{F}=(\frac{\partial F_۳}{\partial y}-\frac{\partial F_۲}{\partial z},\frac{\partial F_۱}{\partial z}-\frac{\partial F_۳}{\partial x},\frac{\partial F_۲}{\partial x}-\frac{\partial F_۱}{\partial y}) \qquad (۱۳)$$

عملگرهای گرادیان، چرخه و دیورژانس هریک رابطهٔ نزدیکی با مشتقگیری دارند. علاوه بر (۸) و (۹)، اتحادهای زیر نیز گاهی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. بعضی از این اتحادها شباهت زیادی به قواعد مشتقگیری دارند. در زیر اعداد حقیقی ثابت با حروف a و b، تابعهای با مقدار حقیقی با حروفی مانند f و g، و میدانهای برداری با نمادهایی چون $\vec{F}$ و $\vec{G}$ نمایش داده شده‌اند. تابع‌ها و میدانها مشتقپذیر فرض شده‌اند.

$$\nabla(af+bg)=a(\nabla f)+b(\nabla g) \qquad (۱۴)$$

$$\nabla(fg)=g(\nabla f)+f(\nabla g) \qquad (۱۵)$$

$$(g \notin ۰) \quad \nabla(\frac{f}{g})=\frac{g(\nabla f)-f(\nabla g)}{g^{۲}} \qquad (۱۶)$$

$$\nabla.(a\vec{F}+b\vec{G})=a(\nabla.\vec{F})+b(\nabla.\vec{G}) \qquad (۱۷)$$

$$\nabla.(f\vec{G})=f(\nabla.\vec{G})+(\nabla f).\vec{G} \qquad (۱۸)$$

$$\nabla.(\vec{F}\times\vec{G})=\vec{G}.(\nabla\times\vec{F})-\vec{F}.(\nabla\times\vec{G}) \qquad (۱۹)$$

$$\nabla\times(a\vec{F}+b\vec{G})=a(\nabla\times\vec{F})+b(\nabla\times\vec{G}) \qquad (۲۰)$$

$$\nabla\times(f\vec{G})=f(\nabla\times\vec{G})+(\nabla f)\times\vec{G} \qquad (۲۱)$$

اثبات این اتحادها سر راست است و به خواننده واگذار می‌شود.