انتگرال روی خم و رویه (۲)

در بخش گذشته انتگرال چگالی روی خم و رویه را بررسی کردیم. اکنون به بررسی نوع دیگری انتگرال روی خم و رویه می‌پردازیم که به انتگرال یک میدان برداری یا انتگرال یک 'فرم دیفرانسیل' شهرت دارد. مقدار این انتگرال نیز تحت اثر بازپرمایش جهت نگهدار عوض نمی‌شود ولی تحت اثر بازپرمایش جهت برگردان تغییر علامت می‌دهد. بحث را از انتگرال روی خم آغاز می‌کنیم.

(۲۲—۱) انتگرال میدان برداری در طول خم فرض کنید $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ یک خم هموار است که گاهی آن راه به‌صورت $\vec{r} = \gamma(t)$ می‌نویسیم و $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ یک میدان برداری پیوسته که دامنهٔ تعریف آن شامل تصویر خم γ در $\mathbb{R}^n$ می‌باشد. انتگرال میدان F در امتداد خم γ که به نماد $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_\gamma (\vec{F}.\frac{d\vec{r}}{ds})ds \tag{۱}$$

بدین ترتیب $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ به یک انتگرال چگالی $\int_\gamma f ds$ تبدیل می‌شود که در آن $f = \vec{F}.\frac{d\vec{r}}{ds}$. نکتهٔ تمایز این است که تحت تعویض متغیر جهت برگردان، $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$ (مماس واحد) در (-۱) ضرب می‌شود، پس f تغییر علامت می‌دهد و در نتیجه (۱) به جهت خم وابسته است. مقدار طرف راست (۱) را می‌توان عیناً به‌صورت انتگرال چگالی محاسبه کرد و با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r} = \int_a^b (\vec{F}(\gamma(t)).\frac{d\vec{r}}{dt})dt \tag{۲}$$

با توجه به اینکه $\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T}$ مماس واحد در جهت پرمایش خم γ است، تعبیر هندسی این انتگرال نیز مشهود است. $\vec{F} \cdot \vec{T} = |\vec{F}| \cos(\vec{F}, \vec{T})$ مؤلفه $\vec{F}$ در جهت $\vec{T}$ است، پس در واقع $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ نمایانگر میزان انباشته شدن میدان $\vec{F}$ در راستای حرکت روی γ است. در فیزیک، اگر $\vec{F}$ یک میدان نیرو باشد

$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را "کار انجام شده" در امتداد γ می‌نامند. قبل از ارائه مثال و کاربردهای این نوع انتگرال، نمادگذاری دیگری را که نیز معمول است معرفی می‌کنیم. بردار $\vec{r}=\gamma(t)$ در واقع مکان متحرک را در زمان t نشان می‌دهد. می‌نویسیم $\vec{r}=(x_1,\ldots,x_n)$، و در نتیجه $\gamma'(t)=(\frac{dx_1}{dt},\cdots,\frac{dx_n}{dt})$. بنابراین (۲) به صورت زیر در می آید:

$$\int_a^b (F_1\frac{dx_1}{dt}+\cdots+F_n\frac{dx_n}{dt})dt \tag{۳}$$

چون تعویض پارامتر جهت نگهدار اثری بر مقدار انتگرال فوق ندارد، گاهی با حذف dt ها انتگرال $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را به صورت زیر نیز می‌نویسند:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\gamma F_1dx_1+\cdots+F_ndx_n \tag{۴}$$

<u>مثال ۱</u> برای $\vec{R}(x,y)=(-y)\vec{i}+x\vec{j}$ و γ دایرهٔ شعاع A به مرکز $(0,0)$ که یک بار در جهت مثلثاتی پیموده شده است، $\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنید.

<u>حل</u> داریم $\vec{r}=\gamma(t)=(A\cos t,A\sin t)$، $0\le t\le 2\pi$، پس $x=A\cos t$ و $y=A\sin t$. بدین ترتیب:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi}(\vec{R}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt})dt\\ &= \int_0^{2\pi}[(-A\sin t)(-A\sin t)+(A\cos t)(A\cos t)]dt\\ &= 2\pi A^2\end{aligned}$$

لازم است که مفهوم انتگرال روی خم را به خم‌های "قطعه قطعه هموار" توسعه دهیم. خم پیوسته $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^n$ را <u>قطعه قطعه هموار</u> می‌نامیم در صورتی که افراز $a=t_0<t_1<\cdots<t_p=b$ وجود داشته باشد که تحدید γ به دامنهٔ $[t_{i-1},t_i]$، برای هر $i=1,\ldots,n$، یک خم هموار تعریف کند. بدین ترتیب γ ممکن است در $\gamma(t_i)$ "گوشه" داشته باشد زیرا که مماس چپ $\vec{T}(t_i)^-$ و مماس راست $\vec{T}(t_i)^+$ ممکن است بر هم منطبق نباشند. برای خم قطعه قطعه هموار فوق، $\int_\gamma f\,ds$ را برابر مجموع $\sum_{i=1}^p\int_{\gamma_i}f\,ds$ تعریف می‌کنیم در آن γ_i تحدید γ به $[t_{i-1},t_i]$ است.

مثال ۲ اگر $\vec{R}$ مانند مثال قبل باشد، $\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r}$ را برای γ: مربع با رئوس $(\pm A, \pm A)$ یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی، محاسبه کنید.

حل

شکل ۵

خم‌های $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ چهار ضلع مربع را طبق شکل توصیف می‌کنند. باید $\sum_{i=1}^{4} \int_{\gamma_i} \vec{R}\cdot d\vec{r}$ را محاسبه کنیم. خم‌ها را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد

$$\begin{cases} \gamma_1(t) = (A, t), & -A \leq t \leq A \\ \gamma_2(t) = (-t, A), & -A \leq t \leq A \\ \gamma_3(t) = (-A, -t), & -A \leq t \leq A \\ \gamma_4(t) = (t, -A), & -A \leq t \leq A \end{cases}$$

پس

$$\int_{\gamma_1} \vec{R}\cdot d\vec{r} = \int_{-A}^{A} [(-t, A)\cdot(0, 1)]dt = \int_{-A}^{A} A dt = 2A^2$$

$$\int_{\gamma_1} \vec{R}\cdot d\vec{r} = \int_{-A}^{A} [(-A, -t)\cdot(-1, 0)]dt = \int_{-A}^{A} A dt = 2A^2$$

به همین ترتیب انتگرال‌های روی γ_3 و γ_4 نیز هر یک برابر $2A^2$ خواهند شد و $\int_\gamma \vec{R}\cdot d\vec{r}$ برابر $8A^2$ می‌شود.

توجه کنید که در این مثال و مثال قبل $\int_\gamma -ydx + xdy$ دو برابر مساحت محصور شده توسط γ درآمد. این یک واقعیت کلی است که بعداً به دلیل آن پی خواهیم برد.

در ادامه بحث، انتگرال‌های روی خم $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ را برای میدان‌های پایستهٔ $\vec{F}$ بررسی می‌کنیم. فرض کنید $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک خم هموار باشد با نقطهٔ آغازی $A = \gamma(a)$ و نقطهٔ پایانی $B = \gamma(b)$،

و $\vec{F} = \bigtriangledown f$ برای تابع مشتق‌پذیر f. در این صورت:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_a^b (\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt})dt \\ &= \int_a^b (f\circ\gamma)'(t)dt \\ &= f(B) - f(A)\end{aligned}$$

یعنی مقدار $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$، مستقل از مسیر هموار γ، برابر اختلاف پتانسیل در دو انتهای مسیر است. این مطلب را می‌توان به خم‌های پیوستهٔ قطعه قطعه هموار $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ نیز تعمیم داد زیرا که اگر $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_p = b$ افرازی باشد که تحدید γ به هر $[t_{i-1}, t_i]$ هموار است و این تحدید را به γ_i نمایش دهیم، آنگاه بنابر پیوستگی خم، $\gamma_i(t_i) = \gamma_{i+1}(t_i)$ و در نتیجه:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^p \int_{\gamma_i} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \sum_{i=1}^p (f(\gamma_i(t_i) - f(\gamma_i(t_{i-1})))) \\ &= f(\gamma_p(b)) - f(\gamma_1(a))\end{aligned}$$

نکتهٔ مهم این که این ویژگی مختص میدان‌های پایسته است.

(۲–۳۷) <u>قضیه</u> فرض کنید U یک مجموعهٔ باز و همبند مسیری در $\mathbb{R}^n$ باشد و $\vec{F}$ یک میدان پیوسته تعریف شده در U. در این صورت $\vec{F}$ پایسته است اگر و تنها اگر $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ مستقل از مسیر باشد، یعنی برای هر دو خم قطعه قطعه هموار α و β در U با نقاط آغازی و پایانی مشترک، داشته باشیم $\int_\alpha \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\beta \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

<u>اثبات</u> لزوم این شرط را در بالا دیدیم. حال فرض کنید شرط استقلال از مسیر برقرار باشد، می‌خواهیم وجود پتانسیل برای میدان $\vec{F}$ را ثابت کنیم. نقطه‌ای P را در U به عنوان نقطهٔ مرجع تثبیت می‌کنیم. تابعی f روی U تعریف می‌کنیم که $\nabla f = \vec{F}$.

شکل ۱

برای نقطهٔ دلخواه Q، $f(Q)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. از آنجا که U همبند مسیری و باز است، مسیری قطعه قطعه هموار از P به Q وجود دارد، و به سبب شرط استقلال از مسیر، $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای هر

مسیر قطعه قطعه هموار از P به Q یک مقدار را دارد، پس با انتخاب یک چنین مسیر γ، می‌توان تعریف کرد:

$$f(Q) = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

باید نشان دهیم f پتانسیل مورد نظر است، یعنی $\frac{\partial f}{\partial x_i} = F_i$، که F_i مؤلفهٔ iـ ام $\vec{F}$ است. به این منظور از Q پاره‌خط راستی به موازات محور x_i رسم می‌کنیم که در U بماند و آن را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\lambda(t) = Q + te_i \quad , \quad ۰ \leq t \leq h$$

نقطهٔ $Q_h = Q + he_i$، نقطهٔ پایانی مسیری است که از P شروع می‌شود، نخست تصویر γ را می‌پیماید و سپس تصویر λ را. این مسیر را، که قطعه قطعه هموار است، به $\gamma * \lambda$ نمایش می‌دهیم. طبق تعریف:

$$f(Q_h) = \int_{\gamma*\lambda} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\lambda \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(Q) + \int_۰^h F_i(\lambda(t))dt$$

(توجه کنید که غیر از مؤلفه iـ ام، سایر مؤلفه‌های λ ثابت هستند) بنابراین:

$$\frac{f(Q_h) - f(Q)}{h} = \frac{۱}{h} \int_۰^h F_i(\lambda(t))dt$$

بنابر قضیهٔ میانگین انتگرال، انتگرال سمت راست برابر است با $h \cdot F_i(Q^*)$ که Q^* نقطه‌ای روی پاره‌خط λ است. بدین ترتیب $\frac{f(Q_h)-f(Q)}{h} = F_i(Q^*)$. وقتی $h \longrightarrow ۰$، Q_h به Q میل می‌کند و در نتیجه Q^* که روی پاره‌خط واصل قرار دارد نیز به Q میل می‌کند. طبق پیوستگی F_i، سمت راست به $F_i(Q)$ میل می‌کند و ثابت می‌شود که $\frac{\partial f}{\partial x_i}(Q) = F_i(Q)$. ■

مثال ۳ میدان $\vec{F}$ روی $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\vec{F}(x_۱, \ldots, x_n) = \sum_{i=۱}^n \frac{x_i}{x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲} \vec{e}_i$$

اگر P و Q دو نقطه به فواصل $|P|$ و $|Q|$ از ۰ باشند و γ یک خم قطعه قطعه هموار در $\mathbb{R}^n - \{۰\}$ با نقطهٔ آغازی P و نقطهٔ پایانی Q، ادعا می‌کنیم $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \ln \frac{|Q|}{|P|}$. بالاخص اگر P و Q هم فاصله از

$\underline{\circ}$ باشند، داریم $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \circ$. در اینجا می‌توان به سادگی حدس زد و تحقیق نمود که میدان $\vec{F}$ دارای پتانسیل $f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\ln(x_1^2+\cdots+x_n^2)$ است و حکم فوراً نتیجه می‌شود.

<u>مثال ۴</u> میدان $\vec{F}$ در $\mathbb{R}^2 - \{\underline{\circ}\}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

آیا این میدان پایسته است؟ توجه کنید که استقلال از مسیر برای انتگرال میدان‌های پایسته نتیجه می‌دهد که انتگرال حول یک مسیر بستهٔ قطعه قطعه هموار باید صفر شود. اگر معلوم شود که $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ برای یک مسیر قطعه قطعه هموار بسته صفر نیست، $\vec{F}$ نمی‌تواند پایسته باشد. γ را دایره‌ای به شعاع R به مرکز $\underline{\circ}$ یک بار پیموده شده در جهت مثلثاتی می‌گیریم:

$$\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t) \quad , \quad \circ \le t \le 2\pi$$

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_\circ^{2\pi} [\frac{-R\sin t}{R^2}(-R\sin t) + \frac{R\cos t}{R^2}(R\cos t)]dt \\ &= \int_\circ^{2\pi} = 2\pi \neq \circ\end{aligned}$$

بدین ترتیب $\vec{F}$ پایسته نیست. ضمناً توجه کنید که نتیجه انتگرال‌گیری به شعاع R بستگی ندارد، این مطلب بعداً بررسی خواهد شد.

مثال را بالا نباید به همین صورت (فقدان پتانسیل) رها کرد. توجه کنید که این میدان بر بردار حامل از $\underline{\circ}$ به نقطهٔ (x,y) عمود است، بنابراین بر نیم‌خط (ثابت $=\theta$) عمود می‌باشد. به نظر می‌آید که باید پتانسیلی برای این میدان وجود داشته باشد که مجموعه‌های تراز آن نیم‌خط‌های ثابت $=\theta$ باشند. در واقع با در نظر گرفتن $f(x,y) = \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$ داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

یعنی، علیرغم آنچه ثابت شد، ظاهراً پتانسیلی برای این میدان موجود است. اشکالی که فوراً به ذهن می‌رسد این است که $\frac{y}{x}$ روی محور y تعریف نشده و $\tan^{-1}(\frac{y}{x})$ نمی‌تواند معنی داشته باشد. ولیکن با قرار دادن $\theta = \frac{\pi}{2}$ روی نیم‌خط بالای محور y و $\theta = \frac{3\pi}{2}$ روی نیم‌خط پایین به نظر می‌آید که مشکل حل شود چون θ چیزی جز مختصهٔ قطبی زاویه نیست. مشکل واقعی در اینجا "چند مقداری بودن" θ است. توجه کنید که اگر نیم‌خط مثبت محور x را با $\theta = 0$ مشخص کنیم و یک دور کامل

شکل ۲

دور مبدأ گردش کنیم در حالی که تابع θ به طور پیوسته تغییر کند، آنگاه در بازگشت به نیمه راست محور x، مقدار θ به (2π) می‌رسد، نه صفر! جالب اینجاست که این مقدار 2π در واقع مقداری است که برای انتگرال مثال قبل به‌دست آورده‌ایم و این امر تصادفی نیست. در واقع به اعتباری، نوعی "پتانسیل چند مقداری" برای $\vec{F}$ وجود دارد که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ همچنان برابر اختلاف پتانسیل بین دو سر مسیر خواهد بود. کار کردن با این پتانسیل‌ها دقت می‌طلبد و بررسی دقیق آنها از کار این درس خارج است. موضع رسمی ما در مورد این میدان همچنان فقدان پتانسیل خواهد بود. پس از مطالعهٔ قضیهٔ گرین در جلسه بعد، به نحو مؤثرتری از این میدان استفاده خواهیم کرد. بالاخص خواهیم دید که $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$، همچنان که با توجه به θ انتظار داریم، برابر $2\pi k$ خواهد بود که k تعداد دفعات گردش مسیر γ حول $\underline{0}$ در جهت مثلثاتی است.

بالاخره در مورد مثال بالا ذکر این نکته نیز لازم است که چنانچه یک نیم‌خط کامل ساطع از $\underline{0}$ را از $\mathbb{R}^2$ حذف کنیم، تابع θ بدون ابهام به عنوان یک تابع مشتق‌پذیر روی باقیماندهٔ صفحه قابل تعریف است زیرا در این ناحیه امکان گردش دور $\underline{0}$ و بازگشت به نقطهٔ آغازی وجود ندارد. مثلاً با حذف $\theta = \theta_0$ و تعریف کردن $\theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi$ برای باقیماندهٔ صفحه، θ تابعی مشتق‌پذیر در دامنهٔ خود خواهد شد. تحدید $\vec{F}$ به چنین ناحیه‌ای پایسته است و $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ برای هر مسیر بسته کاملاً واقع شده در این ناحیه صفر است (شکل ۳).

شکل ۳