انتگرال روی خم و رویه (۱)

تاکنون مفهوم انتگرال فقط روی مجموعه‌های "مسطح" مطرح بوده است: یک بازه در $\mathbb{R}$، یک ناحیه در صفحه و به طور کلی یک ناحیهٔ توپر در $\mathbb{R}^n$. نمونه اشیاء خمیده، یک خم در $\mathbb{R}^n$، یک رویه در $\mathbb{R}^3$، یا یک مجموعه تراز یک تابع غیرخطی $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ است. مفهوم انتگرال روی اینگونه مجموعه‌ها کاربردهای اساسی هم در درون ریاضیات و هم در بیرون آن دارد. در باقیماندهٔ درس مفهوم انتگرال روی خم‌ها و رویه‌ها محور اصلی بحث خواهد بود.

دو نوع انتگرال در اینجا مورد بحث قرار خواهد گرفت. نوع اول که به 'انتگرال چگالی' معروف است برای خم γ به $\int_\gamma f ds$ و برای رویهٔ φ به $\int_\varphi \int f dS$ نمایش داده خواهد شد. در اینجا f تابعی است، معمولاً پیوسته، که روی تصویر خم یا رویه تعریف شده است. در حالتی که f مثبت باشد، اگر آن را به چگالی تصویر خم یا تصویر رویه تعبیر کنیم، مقدار انتگرال مربوط برابر جرم تصویر خواهد بود. مقدار این انتگرال به جهت خم یا رویه بستگی ندارد. نوع دوم انتگرال، که محور اصلی بحثهای بعدی خواهد بود، 'انتگرال یک میدان برداری'، یا 'انتگرال یک فرم دیفرانسیل' نام دارد و با تعویض جهت یا رویه مقدار آن تغییر علامت می‌دهد.

(۳۶—۱) <u>انتگرال چگالی روی خم</u> یک خم هموار $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید و فرض کنید f تابعی با مقدار حقیقی است که دامنهٔ آن شامل تصویر γ می‌باشد. معمولاً با f پیوسته سروکار داریم. طبق معمول پارامتر طول خم را به s نمایش می‌دهیم. تعریف می‌کنیم:

$$\int_\gamma f ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \frac{ds}{dt} dt \qquad (۱)$$

طرف چپ این تعریف به پارامتر خاص t بستگی ندارد ولی طرف راست ظاهراً به t وابسته است. برای این که این تعریف معنی داشته باشد، باید نحوهٔ وابستگی سمت راست به پارامتر t را بررسی کنیم.

فرض کنید $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ یک بازپرمایش γ را تعریف کند، $t=\varphi(\tau)$، داریم:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\gamma(t))\frac{ds}{dt}dt &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}(f\circ\gamma)(\varphi(\tau))\frac{ds}{dt}(\varphi(\tau))\frac{dt}{d\tau}d\tau\\ &= \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}(f\circ\gamma)(\varphi(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\tau\end{aligned}$$

اگر φ جهت‌نگهدار باشد، داریم $\varphi^{-1}(a)=\alpha$ و $\varphi^{-1}(b)=\beta$ پس عبارت سمت راست برابر $\int_\alpha^\beta f((\gamma\circ\varphi)(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\tau$ می‌شود. اگر φ جهت برگردان باشد، $\varphi^{-1}(a)=\beta$ و $\varphi^{-1}(b)=\alpha$ و در نتیجه عبارت سمت راست برابر می‌شود با $-\int_\alpha^\beta f((\gamma\circ\varphi)(\tau))\frac{ds}{d\tau}d\tau$ که در اینجا s پارامتر طول خمیده اولیه یعنی γ است. اگر پارامتر طول خم معکوس را به $\tilde{s}$ نمایش دهیم، داریم $\frac{d\tilde{s}}{dt}=-\frac{ds}{dt}$، پس مجدداً مقدار انتگرال نسبت به پارامتر جدید، یعنی $\int_\alpha^\beta f((\gamma\circ\varphi)(t))\frac{d\tilde{s}}{dt}dt$ همان مقدار سابق است. برای $\int_\gamma f ds$ دو تعبیر زیر را مطرح می‌کنیم.

(۳۶—۱—۱) فرض کنید $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ یک‌به‌یک باشد. اگر f تابعی مثبت باشد و تصویر γ را یک مفتول نازک به چگالی $f(\gamma(t))$ در نقطهٔ متناظر با t فرض کنیم، $\int_\gamma f ds$ جرم کل مفتول تلقی می‌شود.

(۳۶—۱—۲) در حالت خاصی که تصویر خم یک‌به‌یک $\gamma:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}^3$ در یک صفحه مسطح P قرار گیرد، و f مثبت باشد، می‌توان به $\int_\gamma f ds$ یک تعبیر مساحت به صورت زیر نسبت داد. روی تصویر خم γ و عمود بر صفحه P، در هر نقطه $\gamma(t)$ عمودی در یک طرف صفحه به ارتفاع $f(\gamma(t))$ در نظر بگیرید. این پاره‌خط‌های عمود رویه‌ای عمود بر P می‌سازند که مساحت آن برابر $\int_\gamma f ds$ است (شکل ۱).

شکل ۱

<u>مثال</u> مساحت سطح جانبی جسمی را که از تقاطع دو استوانه $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$ ساخته می‌شود محاسبه کنید.

<u>حل</u> قبلاً حجم داخل این جسم را محاسبه کرده‌ایم. سطح جانبی این جسم از دو قسمت متساوی تشکیل شده است که یک بخش آن روی دایرهٔ $x^2+y^2=1$ ساخته شده و متشکل از پاره‌خط‌هایی

است که روی استوانهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ قرار دارند و توسط $x^۲ + z^۲ = ۱$ بریده شده‌اند. روی نقطهٔ $(x, y, ۰)$ از دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$، این پاره‌خط با $-\sqrt{۱ - x^۲} \leq z \leq \sqrt{۱ - x^۲}$ مشخص می‌شود که طول آن $۲\sqrt{۱ - x^۲}$ است. بنابر تقارن، بخش دیگر سطح جانبی نیز وضعیت مشابه دارد (با تعویض نقش y و z). بدین ترتیب:

$$\text{سطح جانبی} = ۲ \times \int_\gamma ۲\sqrt{۱ - x^۲}\,ds$$

که در اینجا γ دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ را نمایش می‌دهد که یک بار در جهت مثلثاتی طی شده است. با استفاده از پرمایش $x = \cos t$، $y = \sin t$، $۰ \leq t \leq ۲\pi$، $s = t$، داریم:

$$\text{سطح جانبی} = ۴ \times \int_۰^{۲\pi} |\sin t| dt = ۸ \times \int_۰^{\pi} \sin t dt = ۱۶$$

(۱–۳۶) <u>انتگرال چگالی روی رویه</u> فرض کنید $\varphi : W \to \mathbb{R}^۳$ یک رویه هموار باشد $\overrightarrow{r} = \varphi(u, v)$، و W یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری در صفحه (u, v). اگر f تابعی با مقدار حقیقی باشد که دامنهٔ آن شامل $\varphi(W)$ است، انتگرال $\int_\varphi\int f dS$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_\varphi\int f dS = \int_W\int f(\varphi(u, v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| du dv \qquad (۲)$$

برای اینکه طرف راست (۲) وجود داشته باشد، تابع $f \circ \varphi$ باید روی ناحیهٔ مجاز W انتگرال‌پذیر باشد. اگر f پیوسته باشد، ترکیب $f \circ \varphi$ نیز پیوسته است، $|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|$ نیز پیوسته می‌باشد زیرا که مشتقات پاره‌ای φ نسبت به u و v پیوسته فرض شده‌اند، پس انتگرال طرف راست وجود دارد.

اکنون به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای و فرمول تعویض متغیر انتگرال دوگانه نشان می‌دهیم که طرف راست (۲) تحت بازپرمایش پا برجا می‌ماند. فرض کنید $\Psi : W' \to W$ تابعی یک‌به‌یک و $C^۱$ از ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری W' به W است به‌طوری که دترمینان ماتریس ژاکوبی Ψ همه‌جا ناصفر است. نقطه $w' = (u', v')$ را به w' نمایش می‌دهیم و می‌نویسیم $\overrightarrow{r} = (x, y, z)$. از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{u'} & y_{v'} \\ z_{u'} & z_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

$$\begin{bmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{u'} & z_{v'} \\ x_{u'} & x_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \qquad (۴)$$

$$\begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{u'} & x_{v'} \\ y_{u'} & y_{v'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u'_u & u'_v \\ v'_u & v'_v \end{bmatrix} \qquad (۵)$$

با توجه به اینکه دترمینان تمرینهای طرف چپ مؤلفه‌های $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ و دترمینان ماتریسهای سمت چپ طرف راست مؤلفه‌های $\overrightarrow{r}_{u'} \times \overrightarrow{r}_{v'}$ هستند، داریم

$$|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v| = |\overrightarrow{r}_{u'} \times \overrightarrow{r}_{v'}|.|\det \frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}| \qquad (٦)$$

با جایگزینی (٦) در (٢) و با استفاده از فرمول تعویض متغیر نتیجه می‌شود که:

$$\int_W \int f(\varphi(u,v))|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v|du\,dv = \int_{W'} \int f(\varphi \circ \Psi(u',v'))|\overrightarrow{r}'_u \times \overrightarrow{r}'_v|du'\,dv'$$

پس تعریف (٢) تحت بازپرمایش تغییر نمی‌کند.

تعبیر جرم و چگالی در اینجا نیز مطرح می‌شود. اگر φ یک‌به‌یک باشد و به ازای هر $(u,v) \in W$، $f(\varphi(u,v)) > \circ$ چگالی رویه در نقطهٔ $\varphi(u,v)$ تلقی شود، طبیعی است که مقدار $\int_\varphi \int f dS$ را جرم کل $\varphi(W)$ تلقی کنیم. مفهوم <u>مرکز ثقل</u> یک مفتول نازک (تصویر یک خم) و مرکز ثقل یک پیوستهٔ نازک (تصویر یک رویه) را نیز اکنون می‌توان به شیوهٔ معمول تعریف کرد. برای خم $\gamma : [\circ, b] \to \mathbb{R}^۳$ و رویهٔ $\varphi : W \to \mathbb{R}^۳$، چگالی را به δ نمایش می‌دهیم. مختصات مرکز ثقل، $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

برای خم γ:

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma x\delta ds}{\int_\gamma \delta ds}, \quad \overline{y} = \frac{\int_\gamma y\delta ds}{\int_\gamma \delta ds}, \quad \overline{t} = \frac{\int_\gamma z\delta ds}{\int_\gamma \delta ds} \qquad (٧)$$

و برای رویهٔ φ:

$$\overline{x} = \frac{\int_\gamma \int y\delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS}, \quad \overline{y} = \frac{\int_\gamma \int y\delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS}, \quad \overline{z} = \frac{\int_\gamma \int z\delta dS}{\int_\gamma \int \delta dS} \qquad (٨)$$

در (۸) و (۹) مخرجها جرم کل را بیان می‌کنند. در حالتی که δ ثابت باشد (چگالی یکنواخت)، δ از صورت و مخرج حذف می‌شود و مرکز هندسی تصویر خم با تصویر رویه به‌دست می‌آید.

مثال مختصات مرکز نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$، $z \geq 0$، را به‌دست آورید وقتی این نیمکره از ماده‌ای با چگالی یکنواخت ساخته شده باشد.

از تقارن کره واضح است که $\overline{x} = \overline{y} = 0$. برای محاسبه $\overline{z}$ از (۹) استفاده می‌کنیم. پس از حذف کردن δ از صورت و مخرج کسر، مخرج عبارت $\overline{z}$ برابر مساحت نیمکره یعنی $2\pi R^2$ خواهد شد. نیمکره را طبق مثال ۲، بخش ۳۵، پرمایش می‌کنیم که در آن $dS = R^2 \sin u \, du \, dv$. پس

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \int z dS &= \int \int R^3 \cos u \sin u \, du \, dv \\ &= (2\pi) R^3 (\tfrac{1}{2}) \sin^2 u |_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi R^3 \end{aligned}$$

بنابراین $\overline{z} = \frac{R}{2}$.

برای معرفی انتگرالهای روی خم و رویه از نوع دوم لازم است که نخست کلیاتی را در مورد 'میدانهای برداری' مطرح کنیم. اگر U زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد و $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع، به F یک میدان برداری نیز می‌گویند. معمولاً وقتی اصطلاح میدان برداری به‌کار می‌رود تجسمی بدین صورت مورد نظر است که بردار $F(x)$ را به مبدأ نقطهٔ x رسم می‌کنیم و کلمهٔ "میدان" یک توزیع پیکان‌ها در نقاط مختلف U را تداعی می‌کند. با این تعبیر، معمولاً برای تأکید برداری بودن مقدار $F(x)$، به جای F از $\vec{F}$ استفاده می‌کنیم.

شکل ۲

در $\mathbb{R}^3$، میدان‌های پایه $\vec{i}$، $\vec{j}$ و $\vec{k}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{i}(x,y,z) = (1,0,0) \quad , \quad \vec{j}(x,y,z) = (0,1,0) \quad , \quad \vec{k}(x,y,z) = (0,0,1) \qquad (9)$$

بدین ترتیب میدان دلخواه $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$ را می‌توان به صورت $\vec{F} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$ نمایش داد. برقراری صفاتی مانند پیوستگی و مشتق‌پذیری برای $\vec{F}$ معادل برقراری این صفات برای هر سه مؤلفه است.

شکل ۳

به همین ترتیب در $\mathbb{R}^n$، میدان‌های پایهٔ $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{e}_j(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, 1, 0 \ldots, 0)$$

که در اینجا درایهٔ ۱ در مکان jــ ام است. هر میدان $\vec{F} = (F_1, \ldots, F_n)$ را می‌توان به صورت $\vec{F}(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\vec{e}_i$ نوشت.

یک مفهوم اساسی در رابطه با میدان برداری، مفهوم "خم انتگرال" است. اگر F یک میدان برداری تعریف شده روی زیرمجموعهٔ U از $\mathbb{R}^n$ باشد، مقصود از یک خم انتگرال (یا خط میدان) برای $\vec{F}$، خمی مشتق‌پذیر $\gamma : I \longrightarrow U$ است که $\gamma'(t) = \vec{F}(\gamma(t))$ به‌ازای هر t در I. بدین ترتیب تصویر خم انتگرال طوری قرار می‌گیرد که بردار سرعت آن همواره منطبق بر بردار میدان داده شده است. پس خم‌های انتگرال در واقع جواب‌های دستگاه معادلهٔ دیفرانسیل زیر می‌شوند:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = F_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = F_n(x) \end{cases} \tag{10}$$

قضیه اساسی وجود و یگانگی جواب معادلات دیفرانسیل حکم می‌کند که اگر $F_1, \ldots, F_n$ دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشند، از هر نقطهٔ x در U، خم انتگرال منحصر به فردی عبور می‌کند. در زیر به ذکر چند مثال در صفحه می‌پردازیم:

مثال ۱ میدان $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ را در نظر بگیرید. این میدان در مبدأ صفر است و در هر نقطهٔ دیگر به اندازهٔ بردار حامل از مبدأ به آن نقطه، از آن نقطه ساطع می‌کند. بدین ترتیب بردارهای میدان همه به دور از مبدأ اشاره می‌کنند. نقطهٔ $(0, 0)$ را در این صورت یک چشمه می‌نامند (شکل ۴، الف) خم‌های انتگرال این میدان نیم‌خط‌های راست هستند که می‌توان به صورت $\gamma(t) = (x_0 e^t, y_0 e^t)$ نمایش داد. توجه کنید که $\gamma(0) = (x_0, y_0)$، و $\gamma(t) \longrightarrow (0, 0)$ وقتی $t \longrightarrow -\infty$.

مثال ۲ برای $\vec{G}(x,y) = -x\vec{i} - y\vec{j}$ جهت میدان مثال ۱ وارونه می‌شود و میدان به سوی مبدأ اشاره می‌کند. $(0,0)$ را در این حالت یک چاهک می‌نامند. خم‌های انتگرال این میدان برداری را می‌توان به صورت $\gamma(t) = (x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t})$ نوشت.

مثال ۳ میدان $\vec{R}(x,y) = (-y)\vec{i} + x\vec{j}$ را در نظر بگیرید. در نقطهٔ (x,y)، بردار میدان عمود بر بردار حامل است و در واقع از دوران $\frac{\pi}{2}$ در جهت مثلثاتی حاصل می‌شود (شکل ۴، ب). خم انتگرال گذرا از نقطهٔ $(x_0, y_0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$ را می‌توان به صورت:

$$\gamma(t) = (r_0 \cos(\theta_0 + t), r_0 \sin(\theta_0 + t))$$

نوشت که تصویر آن یک دایره به شعاع r_0 حول مبدأ است. در این حالت $(0,0)$ را یک مرکز می‌نامند.

مثال ۴ میدان $\vec{S}(x,y) = x\vec{i} + (-y)\vec{j}$ را در نظر بگیرید. این میدان در شکل ۴، ج، نمایش داده شده است و خم انتگرال گذرا از (x_0, y_0) را می‌توان به $\gamma(t) = (x_0 e^{t}, y_0 e^{-t})$ نمایش داد.

شکل ۴

که یک شاخهٔ هذلولی $xy = x_0 y_0$ است. برای $x_0 = 0$، $y_0 \neq 0$ و $y_0 = 0$، $x_0 \neq 0$، نیم‌خط‌های مختصاتی به‌دست می‌آیند. نقطهٔ $(0,0)$ را در اینجا یک نقطه زینی می‌نامند.

نوع مهمی از میدان برداری که قبلاً نیز به آن برخورده‌ایم میدان گرادیان است. اگر U زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر، گرادیان f، ∇f، را به صورت زیر تعریف کرده‌ایم:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\vec{e}_n$$

تابع f را یک پتانسیل برای میدان ∇f می‌نامیم و از آنجا که میدان گرادیان بر مجموعه‌های تراز عمود است، خم‌های انتگرال که بر میدان مماس هستند نیز بر مجموعه‌های تراز عمود خواهند شد. میدان‌های $\vec{F}$، $\vec{G}$ و $\vec{S}$ در مثال‌های ۱، ۲ و ۴ میدان‌های گرادیان هستند با پتانسیل‌های به ترتیب

$f(x,y)=\frac{۱}{۲}(x^۲+y^۲)$، $g(x,y)=\frac{-۱}{۲}(x^۲+y^۲)$ و $s(x,y)=\frac{۱}{۲}(x^۲-y^۲)$. برای f و g، دوایر به مرکز مبدأ مجموعه‌های تراز هستند که بر نیم‌خط‌های مماس بر میدان عمودند. برای s، هذلولی‌های ثابت $= x^۲ - y^۲$ مجموعه‌های تراز هستند که بر خانوادهٔ هذلولی‌های ثابت $= xy$ عمود می‌باشند.

نشان می‌دهیم میدان $\vec{R}$ (مثال ۳) از نوع گرادیان نیست. فرض کنید تابعی $r(x,y)$ وجود داشته باشد که $\nabla r = \vec{R}$، یعنی $\frac{\partial r}{\partial x} = -y$ و $\frac{\partial r}{\partial y} = x$. از آنجایی که تابع‌های $(-y)$ و x خود مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته‌اند، نتیجه می‌شود که $r(x,y)$ باید دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه دوم پیوسته باشد، پس $\frac{\partial^۲ r}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^۲ r}{\partial y\partial x}$، که برقرار نیست زیرا $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial r}{\partial y}) = ۱$ و $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial r}{\partial x}) = -۱$. این استدلال عمومیت دارد و منجر به شرط لازم زیر برای گرادیان بودن می‌شود:

(۲−۳۶) <u>شرط لازم برای گرادیان بودن یک میدان</u> فرض کنید میدان برداری $\vec{F} = F_۱\vec{e}_۱ + \cdots + F_n\vec{e}_n$ که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته مرتبهٔ اول است، گرادیان یک تابع باشد، در این صورت:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{برای هر زوج} \quad i,j = ۱,\dots,n$$

اگر f پتانسیل $\vec{F}$ باشد، تساوی بالا همان $\frac{\partial^۲ f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^۲ f}{\partial x_j \partial x_i}$ است. میدان‌های برداری گرادیان را <u>میدان‌های پایسته</u> نیز می‌نامند.