رویه‌های هموار

در بخشهای ۱۲، ۱۳ و ۱۴ به بررسی نسبتاً مسبوطی از 'خمهای هموار' پرداختیم. در اینجا می‌خواهیم به توصیف اشیاء هموار دوبعدی احتمالاً خمیده (غیر مسطح) بپردازیم. به این منظور نخست مفهوم 'رویهٔ پارارمتری' را مطرح می‌کنیم، سپس شرطی را که متضمن خاصیت 'هموار بودن' است به تعریف می‌افزائیم. برای توصیف رویه که برداشت ذهنی ما از آن یک شی دوبعدی است دو پارامتر مورد نیاز است همانگونه که برای توصیف خم (یک بعدی) یک پارامتر t مورد استفاده قرار می‌گرفت.

اگر W یک ناحیه در صفحه uv باشد، تابع

$$\vec{r} = \varphi(u,v) \quad , \quad \varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

یک رویهٔ پارامتری در $\mathbb{R}^3$ تعریف می‌کند. صفات پیوسته، مشتق‌پذیر، مشتق‌پذیر با مشتقات پاره‌ای پیوسته (اصطلاحاً C^1) وقتی به رویه پارامتری اطلاق شوند مقصود این است که تابع φ از این صفات برخوردار است. البته $\varphi(u,v)$ دارای سه مؤلفه (x,y,z) است، $x=\varphi_1(u,v)$، $y=\varphi_2(u,v)$، $z=\varphi_3(u,v)$ و صفت مربوط باید برای هر یک از تابع‌های φ_1، φ_2 و φ_3 برقرار باشد. شکل ۱ تجسم ما از رویه‌های پارامتری را نشان می‌دهد انتظار داریم خطوط راست (ثابت $=u$)و (ثابت $=v$) تحت اثر φ به خم‌هایی روی تصویر φ منتقل شوند و نوعی "دستگاه مختصات خمیده" روی $\varphi(W)$ بسازند

شکل ۱

این انتظار در حالت کلی کمی خوشبینانه است زیرا که به طور کلی تصویر φ ممکن است "دو بعدی" نشود، مثلاً φ ممکن است کل W را به یک پاره‌خط یا حتی یک نقطه بنگارد (تابع ثابت). در مورد خم‌ها، افزودن شرط پیوستگی مشتق و ناصفر ماندن بردار سرعت، این تضمین را ایجاد کرد که تصویر

خم پارامتری "یک بعدی و هموار" است. در اینجا باید شرط مشابهی را جستجو کنیم. مشتق‌های پاره‌ای φ نسبت به u و v را به ترتیب به $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب:

$$\vec{r}_u = (\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}) \quad , \quad \vec{r}_v = (\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v})$$

$\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ تعبیر هندسی جالب توجهی دارند. با ثابت نگاهداشتن $v = v_\circ$ و مشتق‌گیری نسبت به u، بردار سرعت خم $\varphi(u, v_\circ)$ را که روی $\varphi(u,v)$ قرار دارد در نظر گرفته‌ایم، و به همین ترتیب $\vec{r}_v$ بردار سرعت خم $\varphi(u_\circ, v)$ است. پس $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ بردارهای مماس بر $\varphi(W)$ در نقطهٔ $\varphi(u,v)$ تلقی می‌شوند. اگر $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ همراستا نباشند، انتظار داریم u و v دو جهت مستقل روی رویهٔ $\varphi(W)$ را مدرج کنند و بدین ترتیب شیئی "دو بعدی" حاصل شود. با این زمینه، رویه پارامتری $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^3$، $\vec{r} = \varphi(u,v)$، را هموار می‌نامیم در صورتی که شرایط زیر برقرار باشند:

الف) φ مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد.

ب) به‌ازای هر (u,v) در W داشته باشیم $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \underline{\circ}$ (معادلاً $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ همراستا نباشند).

ضمناً توجه کنید که چون $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ بر $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ عمود است، و $\vec{r}_u$، $\vec{r}_v$ دو جهت مماس مستقل بر رویه را نشان می‌دهند، بردار واحد $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}$ بر $\varphi(W)$ عمود خواهد بود. $\vec{n}$ را قائم واحد قراردادی رویهٔ هموار φ می‌نامیم.

برای توجیه اصطلاح هموار، نشان می‌دهیم که تحت این شرط، اگر $(u_\circ, v_\circ)$ نقطه‌ای از W باشد، آنگاه تحت شرط هموار بودن، گوی بازی D حول $(u_\circ, v_\circ)$ وجود دارد که تصویر آن تحت φ، در واقع نمودار یک تابع مشتق‌پذیر دو متغیری است. اگر ماتریس ژاکوبی φ (مشتق φ) در نقطهٔ $(u_\circ, v_\circ)$ را در نظر بگیریم، داریم:

$$D\varphi(u_\circ, v_\circ) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}$$

یعنی $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ ستون‌های این ماتریس هستند. همراستا نبودن $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$ دلالت بر این می‌کند که تصویرهای قائم این دو بردار بر دست کم یکی از سه صفحهٔ مختصاتی xy، yz یا zy همراستا نیستند.

برای صراحت فرض کنید تصویر این دو بر صفحه xy همراستا نباشند، یعنی $(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u})$ و $(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v})$ همراستا نباشند. نتیجه اینکه

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}_{(u_\circ, v_\circ)} \neq \circ$$

طبق قضیهٔ تابع وارون مجموعهٔ باز D' حول $(x_\circ, y_\circ)$ (تصویر قائم $\varphi(u_\circ, v_\circ)$ روی صفحه xy) وجود دارد و مجموعهٔ باز D حول $(u_\circ, v_\circ)$ به طوری که φ یک تناظر یک به یک میان D و D' برقرار می‌کند و وارون آن، $\varphi^{-۱} : D' \longrightarrow D$ نیز مشتق‌پذیر است. بدین ترتیب (u, v) در D تابعی مشتق‌پذیر از (x, y) در D' می‌شود. نتیجه این که $z = \varphi_۳(u, v)$ نیز تابعی مشتق‌پذیر از (x, y) است،

$$z = (\varphi_۳ \circ \varphi^{-۱})(x, y)$$

پس نقاط $\varphi(u, v) = (x, y, z)$ برای (u, v) نزدیک $(u_\circ, v_\circ)$ به صورت $(x, y, (\varphi_۳ \circ \varphi^{-۱})(x, y))$ یعنی نمودار تابع مشتق‌پذیر $\varphi_۳ \circ \varphi^{-۱}$ قابل نمایش‌اند. بدین مفهوم شرط‌های (الف) و (ب) مفهوم شهودی هموار بودن را برقرار می‌کنند.

استدلال بالا ضمناً نشان می‌دهد که برای هر $w_\circ = (u_\circ, v_\circ)$ در W، دامنهٔ تعریف یک رویهٔ هموار، مجموعهٔ بازی حول $w_\circ$ وجود دارد که تحدید φ به آن یک به یک است، هر چند که یک رویهٔ هموار ممکن است نهایتاً خود را قطع کند. نکتهٔ دیگر این که $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$، ستون‌های $D\varphi(u, v)$، تصاویر $e_۱ = (۱, \circ)$ و $e_۲ = (\circ, ۱)$ تحت اثر تقریب خطی هستند، بنابراین ضریب تغییر مساحت در نقطهٔ (u, v) برابر مساحت متوازی الاضلاع تعریف شده توسط $\vec{r}_u$ و $\vec{r}_v$، یعنی $|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|$، است (مراجعه کنید به بحث تعویض متغیر در انتگرال)، از این رو $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$ را <u>عنصر سطح</u> رویهٔ هموار φ می‌نامند. اگر D زیرمجموعه‌ای از W باشد که روی آن φ یک به یک است و D یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری در صفحه uv باشد، تعریف می‌کنیم:

$$\text{مساحت}\ \varphi(M) = \int\int_D dS = \int\int_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| dudv$$

<u>مثال ۱</u> اگر W یک زیرمجموعهٔ باز $\mathbb{R}^2$ باشد و $f: W \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته، نمودار f را می‌توان به صورت یک رویهٔ هموار پارامتری کرد:

$$\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad , \quad \varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

داریم $\vec{r}_u = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial u})$، $\vec{r}_v = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial v})$، $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)$ پس

$$dS = \sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2} \quad , \quad \vec{n} = \frac{(-\frac{\partial f}{\partial u}, -\frac{\partial f}{\partial v}, 1)}{\sqrt{1 + (\frac{\partial f}{\partial u})^2 + (\frac{\partial f}{\partial v})^2}}$$

به کمک dS بالا می‌توانیم مساحت نمودارها را محاسبه کنیم.

<u>مثال ۱ــ۱</u> سطح جانبی جسم به‌دست آمده از اشتراک استوانه‌های $x^2 + y^2 \leq 1$ و $x^2 + z^2 \leq 1$ را محاسبه کنید.

برای این کار توجه کنید که به سبب تقارن، مساحت مورد نظر چهار برابر مساحت نمودار $z = \sqrt{1 - x^2}$ روی گوی $x^2 + y^2 \leq 1$ است. داریم $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$، $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$، پس مساحت نمودار برابر است با:

$$\begin{aligned} \int\int_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} dA &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2 dx = 4 \end{aligned}$$

بنابراین سطح جانبی مورد نظر برابر ۱۶ است. همین نتیجه را از روش انتگرال‌گیری روی خم نیز به‌دست آورده بودیم.

<u>مثال ۲</u> کره شعاع R حول $\underline{0}$ در $\mathbb{R}^3$ را به کمک مختصات کروی پارامتری می‌کنیم. تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(u,v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

$$0 \leq u \leq \pi \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

در اینجا مختصه‌های کروی φ و θ به ترتیب به u و v نمایش داده شده‌اند. داریم:

$$\vec{r}_u = (R \cos u \cos v, R \cos u \sin v, -R \sin u) \quad , \quad \vec{r}_v = (-R \sin u \sin v, R \sin u \cos v, 0)$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (R^2 \sin^2 u \cos v, R^2 \sin^2 u \sin v, R^2 \sin u \cos v) \quad , \quad dS = R^2 \sin u du dv$$

توجه کنید که شرط هموار بودن به‌ازای $u = 0, \pi$ (دو قطب کره) نقض می‌شود. این پدیده فقط ناشی از روش پارامتری کردن است و ارتباطی با شکل کره ندارد. توجه کنید که در دو قطب خطوط مختصاتی، یعنی تصاویر ثابت $= u$ و ثابت $= v$ (مدارها و نصف النهارها) از حالت متقاطع بودن خارج می‌شوند زیرا تصویر هر یک از $u = 0$ و $u = \pi$ یک تک نقطه است. با این حال، برای منظورهای انتگرال‌گیری، چنانچه تابعی در سراسر کره انتگرال‌پذیر باشد، دو خط $u = 0$ و $u = \pi$ که اندازهٔ دو بعدی صفر در مستطیل $0 \leq u \leq \pi$، $0 \leq v \leq 2\pi$، دارند، بی‌اثر هستند.

<u>مثال ۳</u> (چنبره دوار) برای ثابت‌های $a > b > 0$، تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r} = \varphi(u,v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$$

$$0 \leq u \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

این رویه از دوران دایرهٔ شعاع b به مرکز $(a, 0)$ در صفحهٔ xz حول محور z به‌دست می‌آید. تعبیر زاویه‌های u و v در شکل ۲ نمایش داده شده است. u دایرهٔ اولیه را مدرج می‌کند و v در واقع مختصهٔ θ در مختصات استوانه‌ای است، داریم:

$$\begin{cases} \vec{r}_u = ((-b\sin u)\cos v, (-b\sin u)\sin v, b\cos u) \\ \vec{r}_v = (-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0) \end{cases}$$

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-b(a + b\cos u)\cos u\cos v, -b(a + b\cos u)\cos u\sin v, -b\sin u(a + b\cos u))$$

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = b(a + b\cos u) \quad , \quad dS = b(a + b\cos u)dudv$$

توجه کنید که شرط هموار بودن همه‌جا برقرار است. مساحت این چنبره برابر می‌شود با:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} b(a + b\cos u)dudv = (2\pi b)(2\pi a) = 4\pi^2 ab$$

شکل ۲

<u>مثال ۴</u> برای $a, b, c > 0$ داده شده تعریف می‌کنیم:

$$\vec{r} = \varphi(u,v) = (a\cosh u\cos v, b\cosh u\sin v, c\sinh u)$$

$$0 \leq u \leq 1 \quad , \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

اگر سه مؤلفه $\varphi(u,v)$ را به ترتیب x، y و z بخوانیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱$$

پس تصویر جزیی از هذلولی‌وار یکپارچهٔ $\frac{x^۲}{a^۲}+\frac{y^۲}{b^۲}-\frac{z^۲}{c^۲}=۱$ است، در واقع قسمتی که برای آن $۰\leq z\leq c\sinh ۱$ (شکل ۳). داریم

$$\vec{r}_u=(a\sinh u\cos v, b\sinh u\sin v, c\cosh u), \vec{r}_v=(-a\cosh u\sin v, b\cosh u\cos v, ۰)$$

$$\vec{r}_u\times\vec{r}_v=(-bc\cosh^۲ u\cos v, -ac\cosh^۲ u\sin v, ab\sinh u\cosh u)\neq \underline{۰}$$

پس شرط هموار بودن برقرار است.

شکل ۳

در مثال‌های بالا عمدتاً شرط هموار بودن نقض نمی‌شد و در یک مورد (کره) نقض این شرط تعبیر هندسی نداشت، بلکه یک ویژگی روش پارامتری کردن را منعکس می‌کرد. در زیر چند مثال از ناهنجاری‌های هندسی که ممکن است در اثر نقض شرط هموار بودن پیش آید نشان می‌دهیم:

مثال ۵ (الف) برای a,b,c داده شده تعریف کنید

$$\varphi(u,v)=(a,b,c) \quad , \quad (u,v)\in\mathbb{R}^۲$$

در اینجا به وضوح $\vec{r}_u=\vec{r}_v=\underline{۰}$ و شرط هموار بودن همه‌جا نقض می‌شود. تصویر φ در واقع یک تک نقطه‌ای است و یک "رویه" به مفهوم دو بعدی آن نیست.

(ب) برای تابع $f:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}$ که دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است، تعریف کنید:

$$\varphi(u,v)=(f(u,v), f(u,v), f(u,v))$$

تصویر φ بخشی از خط راست $x=y=z$ است، یعنی یک بعدی است و با شهود رویهٔ دو بعدی سازگار نیست. در واقع $\vec{r}_u=(\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u},\frac{\partial f}{\partial u})$، $\vec{r}_v=(\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial v})$ و $\vec{r}_u\times\vec{r}_v=\underline{۰}$.

(ج)

$$\vec{r}=\varphi(u,v)=(u\cos v, u\sin v, u) \quad , \quad (u,v)\in\mathbb{R}^۲$$

داریم $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, ۱)$، $\vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, ۰)$، پس

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-u\cos v, -u\sin v, u)$$

به‌ازای $u = ۰$ شرط هموار بودن نقض می‌شود. در واقع تصویر φ مخروط $z^۲ = x^۲ + y^۲$ است و $u = ۰$ متناظر با رأس مخروط می‌باشد که در آن نقطه مخروط صفحهٔ مماس ندارد

شکل ۳

(د) به مثال ۴، بخش ۱۲، $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^۲$، نگاه کنید که در آن تصویر γ نمودار $y = |x|$ را به صورت مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته پارامتری می‌کند ولی $\gamma'(۰) = ۰$. حال تعریف کنید:

$$\vec{r} = \varphi(u,v) = (u, \gamma_۱(v), \gamma_۲(v)) \quad , \quad (u,v) \in \mathbb{R}^۲$$

که در آن $\gamma(v) = (\gamma_۱(v), \gamma_۲(v))$. داریم:

$$\vec{r}_u = (۱, ۰, ۰) \quad , \quad \vec{r}_v = (۰, \gamma_۱'(v), \gamma_۲'(v)) \quad , \quad \vec{r}_u \times \vec{r}_v = (۰, -\gamma_۲'(v), \gamma_۱'(v))$$

برای $v = ۰$، مستقل از u، شرط هموار بودن نقض می‌شود. $v = ۰$ در شکل ۴ متناظر با خط "تا شدن" رویه است که در سراسر آن صفحه مماس بر تصویر رویه وجود ندارد.

در اینجا لازم است یک نمایش معمول دیگر برای $dS = |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| du dv$ را نیز معرفی کنیم. داریم:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^۲ = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)$$

طبق اتحاد لاگرانژ

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}) \qquad (۱)$$

می‌توان نوشت:

$$|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|^۲ = (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u)(\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v) - (\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v)^۲$$

معمولاً $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_u$ را به E، $\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$ را به F و $\vec{r}_v \cdot \vec{r}_v$ را به G نمایش می‌دهند (نمادگذاری گاوس)، پس:

$$dS = \sqrt{EG - F^{۲}}\, dudv \qquad (۲)$$

یادداشت تصویر یک رویه هموار ممکن است پرمایش‌های گوناگون به عنوان رویهٔ هموار داشته باشد، می‌توان "بازپرمایش" را همچنان که در مورد خم‌های هموار مطرح کردیم در اینجا نیز مطرح کنیم. در ساده‌ترین حالت فرض کنید W و W' دو مجموعهٔ باز و همبند مسیری در $\mathbb{R}^{۲}$ باشند، نقاط W را به (u,v) و نقاط W' را به (u',v') نمایش دهید. فرض کنید $\tau : W' \longrightarrow W$ یک نگاشت یک به یک، پوشا و دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشد که به‌ازای هر $w' = (u',v')$ در W' داشته باشیم $\det D\tau(w') \neq ۰$. اگر $\varphi : W \longrightarrow \mathbb{R}^{۳}$ یک رویهٔ‌هموار تعریف کند، $\varphi \circ \tau : W' \longrightarrow \mathbb{R}^{۳}$ نیز یک رویهٔ هموار است و همان مجموعهٔ $\varphi(W)$ را توصیف می‌کند. چون W' همبند مسیری فرض شده است، $\det D\tau(w')$ برای همهٔ نقاط w' از W' یا مثبت یا منفی است (در غیر این صورت اگر مسیر پیوسته‌ای بین دو نقطه با علامت مختلف در نظر بگیریم، به سبب پیوستگی $\det D\varphi(w')$، این کمیت باید جایی در طول مسیر صفر شود که خلاف فرض است). در حالت اول τ را یک بازپرمایش جهت‌نگهدار و در حالت دوم τ را یک بازپرمایش جهت‌برگردان می‌نامند. برای بازپرمایش‌های جهت‌نگهدار، قائم واحد قراردادی تغییر نمی‌کند، ولی برای بازپرمایش‌های جهت‌برگردان، $\vec{n}$ وارونه می‌شود. پس در واقع یک رویهٔ هموار در $\mathbb{R}^{۳}$ دو 'جهت' می‌پذیرد که با انتخاب جهت قائم واحد مشخص می‌شود.