تعویض متغیر در انتگرال چندگانه

در حالت یک متغیری مشاهده کرده‌ایم که کمتر ممکن است یک انتگرال مستقیماً از دستورهای متداول جداول تابع اولیه محاسبه شود، بلکه معمولاً نوعی تعویض متغیر و استفادهٔ هر چند ضمنی از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای محاسبهٔ انتگرال لازم است. در مورد توابع چند متغیری نیاز به یک روش مؤثر تعویض متغیر از اهمیت کمتری برخوردار نیست و نقشی تعیین کننده هم در عمل و هم در تئوری دارد. قبل از پرداختن به فرمول تعویض متغیر انتگرال چند متغیری لازم است حالت یک متغیری را مورد بازبینی قرار دهیم. فرض کنید $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع انتگرال‌پذیر، مثلاً تابعی پیوسته، باشد، $\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته به طوری که φ بازه $[\alpha,\beta]$ را بر بازهٔ $[a,b]$ می‌نگارد به این‌صورت که $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$، یا $\varphi(\alpha)=b$ و $\varphi(\beta)=a$. اگر نقاط $[a,b]$ را به t و نقاط $[a,b]$ را به τ نمایش دهیم، داریم

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau \qquad (۱)$$

این فرمول تعویض متغیر تابع‌های یک متغیری است و به سادگی از قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌شود. می‌خواهیم این فرمول را از دیدگاه هندسی تعبیر انتگرال به عنوان مساحت بررسی کنیم و به خصوص به نقش $\varphi'(\tau)$ آگاهی عمیقتری کسب کنیم. به این منظور f را مثبت فرض کنید و موقتاً فرض کنید φ' تغییر علامت نمی‌دهد، یعنی همواره $\varphi'(\tau)>0$ یا همواره $\varphi'(\tau)<0$ برای هر τ در $[\alpha,\beta]$. بدین ترتیب φ صعودی یا نزولی و در هر حال یک به یک است. وقتی $\varphi'>0$، داریم $\varphi(\alpha)=a$ و $\varphi(\beta)=b$، و در حالتی که $\varphi'<0$، داریم $\varphi(\alpha)=b$ و $\varphi(\beta)=\alpha$. در شکل ۲ نمودارهای f و $f\circ\varphi$ را

شکل ۱

در حالت $\varphi' > 0$ نمایش داده‌ایم. توجه کنید که به طور کلی طول بازه‌های $[\alpha, \beta]$ و $[a, b]$ لازم نیست برابر باشد ولی چون φ یک به یک فرض شده است تناظری یک به یک میان نقاط $[\alpha, \beta]$ و $[a, b]$ وجود دارد و مقادیر f و $f \circ \varphi$ در نقاط متناظر برابر است: $f(t) = (f \circ \varphi)(\tau)$، وقتی $t = \varphi(\tau)$. به طور کلی نمودار f از نمودار $f \circ \varphi$ با کشش وقتی $\varphi' > 1$ و فشردن وقتی $0 < \varphi' < 1$ به‌دست می‌آید.

شکل ۲

از آنجا که تناظری یک به یک بین مقادیر دو تابع f و $f \circ \varphi$ وجود دارد ولی توزیع این مقادیر با حفظ ترتیب به سبب انبساط $(\varphi' > 1)$ یا انقباض $(\varphi' < 1)$ پایه دستخوش جابجایی شده است، نمی‌توان انتظار داشت که دو مساحت $\int_a^b f(t)dt$ و $\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))d\tau$ برابر باشند. در اینجا نقش هندسی ضریب $\varphi'(\tau)$ که باید در داخل انتگرال دوم ضرب شود نمایان می‌شود. وقتی $\varphi'(\tau) > 1$ بازه‌های کوچک حول τ تحت φ بزرگتر می‌شوند، بنابراین افزایش مساحت روی بازهٔ متناظر صورت می‌گیرد، و بالعکس وقتی $0 < \varphi'(\tau) < 1$، φ بازه‌های کوچک حول τ را منقبض می‌کند و کاهش مساحت زیر منحنی رخ می‌دهد. حال با ضرب کردن $f(\varphi(\tau))$ در $\varphi'(\tau)$ عملاً نوعی "تصحیح تغییر طول پایه" با تعدیل نمودار صورت می‌گیرد به طوری که $\int_a^b f(t)dt$ و $\int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)d\tau$ دو مساحت برابر را نشان می‌دهند. شکل ۳ بیانگر این مطلب است.

شکل ۳

در حالت $\varphi' < 0$ وضع مشابه این است با این تفاوت که دو انتهای بازه تعویض می‌شوند. در این حالت منفی بودن φ' و این که در $\int_\alpha^\beta$ حد بالای انتگرال کوچکتر از حد پایین است (شکل ۱، سمت راست) توأماً منجر به نتیجه مثبت برای حاصل انتگرال‌گیری می‌شوند.

یک نکتهٔ آخر در مورد فرمول تعویض متغیر این که در (۱) لازم نیست φ تابعی یک به یک باشد. نکته این است که وقتی φ' تغییر علامت می‌دهد، همان طور که در بالا ذکر شد، تعویض حدود بالا و پایین انتگرال خود به خود نتیجه نهایی را تصحیح می‌کند. در شکل ۴ انتگرال‌گیری $\int_a^b 1 \cdot dt$ تحت تعویض متغیر غیر یک به یک نمایش داده شده است.

شکل ۴

با این مقدمات آماده‌ایم تعویض متغیر در انتگرال چندگانه را توصیف کنیم:

(۳۴–۱) <u>قضیه</u> (تعویض متغیر انتگرال چندگانه) W و W' ناحیه‌های همبند مسیری و مجاز انتگرال‌گیری در $\mathbb{R}^n$ هستند، φ یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته از یک زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$ که دامنه آن شامل W' است و W' را به طور یک به یک بر W می‌نگارد، $\varphi(W') = W$، و $\det D\varphi(x) \neq 0$ برای هر x در W'. در این صورت برای هر تابع انتگرال‌پذیر $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_W f = \int_{W'} (f \circ \varphi) \cdot |\det D\varphi| \qquad (۲)$$

تحت شرایط قضیه $(f \circ \varphi)|\det D\varphi|$ یک تابع انتگرال‌پذیر روی W' خواهد شد، و طبق قضیهٔ تابع وارون، وارون تحدید f به W وجود دارد، $\varphi^{-1} : W \longrightarrow W'$، و φ^{-1} دارای مشتقات پاره‌ای پیوسته است.

فرمول (۲) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت. اگر نقاط W را به $y = (y_1, \ldots, y_n)$ و نقاط W' را به $x = (x_1, \ldots, x_n)$ نمایش دهیم، $y = \varphi(x)$، آنگاه

$$\int \cdots \int_W f(y_1, \ldots, y_n) dV_y = \int \cdots \int_{W'} f(\varphi(x_1, \ldots, x_n)) |\det \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}| dV_x \qquad (۳)$$

مقصود از dV_x و dV_y به ترتیب $dx_1 \ldots dx_n$ و $dy_1 \ldots dy_n$، هر یک به ترتیب مناسب برای انتگرال‌گیری مکرر است.

قبل از توضیح بیشتر در مورد صحت این فرمول، که در پایان جلسه خواهد آمد، نکته‌ای در مورد مقایسهٔ این فرمول با حالت یک متغیری ذکر می‌کنیم و چند مثال می‌آوریم.

(۳۴–۲) <u>مقایسه با حالت یک متغیری</u> در نگاه اول وجود علامت قدرمطلق در اینجا متفاوت از حالت یک متغیری به‌نظر می‌رسد. در حالت یک متغیری نیازی به $|\ |$ نیست زیرا که در صورت منفی بودن φ'، حدود انتگرال‌گیری خود به خود وارونه می‌شوند یعنی حد بالایی کوچکتر از حد پایینی خواهد شد ولی در حالت $n \geq 2$، روش انتگرال‌گیری روی مستطیل‌ها چنان بود که همواره حد پایینی انتگرال

کوچکتر از حد بالایی است. از این رو علامت قدر مطلق الزامی می‌شود. در حالت یک متغیری نیز می‌توان فرمول (۱) را به صورت

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\tau))|\varphi'(\tau)|d\tau$$

نوشت مشروط بر این که به جای $\varphi(\alpha) = a$ و $\varphi(\beta) = b$ داشته باشیم $\{\varphi(\alpha), \varphi(\beta)\} = \{a, b\}$، $a \leq b$ و $\alpha \leq \beta$. شرط یک به یک بودن φ نیز در اینجا الزامی می‌شود زیرا به علت فقدان مکانیسمی مشابه وارونه کردن حد بالایی و پایینی انتگرال، حذف خود به خود انتگرال‌گیری مثبت و منفی زائد صورت نمی‌گیرد.

<u>مثال ۱</u> حجم درون بیضی‌وار، یعنی ناحیه $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ را محاسبه کنید که در آن a, b, c اعداد حقیقی مثبت داده شده‌اند.

<u>حل</u> با یک تعویض متغیر ساده می‌توان بیضی‌وار را به کره تبدیل کرد که حجم درون آن را می‌دانیم. قرار دهید $X = \frac{x}{a}$ و $Y = \frac{y}{b}$ و $Z = \frac{z}{c}$، و:

$$(x, y, z) = \varphi(X, Y, Z) = (aX, bY, cZ)$$

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(X, Y, Z)} = \det \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = abc$$

$$\int\int\int_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1} 1 \cdot dV_{x,y,z} = \int\int\int_{X^2+Y^2+Z^2\leq 1} (abc)dV_{X,Y,Z} = (abc)\frac{4}{3}\pi$$

<u>مثال ۲</u> حجم جسم محصور درون کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ و درون استوانهٔ $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}$ را محاسبه کنید.

<u>حل</u>

شکل ۵

از مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) استفاده می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که $r = \det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}$. معادلهٔ دایرهٔ $(x-\frac{۱}{۲})^۲+y^۲=\frac{۱}{۴}$ در مختصات قطبی می‌شود $r=\cos\theta$، $-\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲}$، بنابراین جسم سه‌بعدی مورد نظر در مختصات استوانه‌ای توصیف زیر را دارد:

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{۲}\le\theta\le\frac{\pi}{۲} \\ ۰\le r\le\cos\theta \\ -\sqrt{۱-r^۲}\le z\le\sqrt{۱-r^۲} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\text{حجم مورد نظر} &= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\cos\theta}\int_{-\sqrt{۱-r^۲}}^{\sqrt{۱-r^۲}} r\,dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\cos\theta}(۲r)\sqrt{۱-r^۲}\,dr\,d\theta \\
&= -\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}\frac{۲}{۳}[(۱-\cos^۲\theta)^{\frac{۳}{۲}}-۱]d\theta \\
&= -\frac{۲}{۳}\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}}(|\sin\theta|^۳-۱)d\theta = -\frac{۴}{۳}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}(\sin^۳\theta-۱)d\theta \\
&= (-\frac{۴}{۳})\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}[\sin\theta-\sin\theta\cos^۲\theta-۱]d\theta \\
&= (-\frac{۴}{۳})[(۰+۱)+\frac{۱}{۳}(۰-۱)-\frac{\pi}{۲}] \\
&= \frac{۲\pi}{۳}-\frac{۸}{۹}
\end{aligned}$$

<u>مثال ۳</u> حجم قیفی که از بالا به سطح کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=R^۲$ و از پایین به مخروط $\varphi=\alpha$ (φ: مختصهٔ کروی، α: ثابت در $[۰,\pi]$) محصور است محاسبه کنید

شکل ٦

حل می‌دانیم $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = \rho^۲ \sin\varphi$. ناحیهٔ مورد نظر در مختصات کروی توصیف زیر را دارد:

$$\begin{cases} ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \\ ۰ \leq \varphi \leq \alpha \\ ۰ \leq \rho \leq R \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \text{حجم مورد نظر} &= \int_۰^{۲\pi}\int_۰^{\alpha}\int_۰^{R} \rho^۲ \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= (۲\pi)(\int_۰^{\alpha} \sin\varphi d\varphi)(\int_۰^{\rho} \rho^۲ d\rho) \\ &= \frac{۲\pi}{۳}R^۳(-\cos\alpha + ۱) \end{aligned}$$

توجه کنید برای $\alpha = \pi$، حجم گوی سه‌بعدی شعاع R، یعنی $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$، حاصل می‌شود.

مثال ۴ مساحت متوازی الاضلاع محصور به چهار خط دو به دو موازی زیر را محاسبه کنید:

$$\begin{cases} A_۱x + B_۱y = C_۱ \\ A_۱x + B_۱y = C'_۱ \end{cases} \qquad \begin{cases} A_۲x + B_۲y = C_۲ \\ A_۲x + B_۲y = C'_۲ \end{cases}$$

حل حل این مسأله به روش عادی انتگرال‌گیری یک متغیری برای مساحت در تئوری سر راست است ولیکن با توجه به وضعیت‌های گوناگونی که ممکن است چهار رأس قرار گیرند انتگرال مربوط را باید به چند انتگرال تقسیم کرد و محاسبات در هر صورت جذاب و طبیعی نیستند. با فرمول تعویض متغیر انتگرال دوگانه می‌توانیم متوازی الاضلاع را به صورت یک مستطیل در آوریم و با یک محاسبهٔ ساده جواب مورد نظر در حالت کلی مستقل از مکان نسبی چهار رأس به‌دست می‌آید. تعویض متغیر طبیعی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} u = A_۱x + B_۱y \\ v = A_۲x + B_۲y \end{cases}$$

پس $\begin{bmatrix} A_۱ & B_۱ \\ A_۲ & B_۲ \end{bmatrix} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ که دترمینان آن $A_۱B_۲ - A_۲B_۱$ است. با توجه به این که دترمینان

معکوس ماتریس برابر معکوس دترمینان آن ماتریس است، داریم

$$|\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}| = \frac{۱}{|A_۱B_۲ - A_۲B_۱|}$$

بدین ترتیب

$$\begin{aligned} \int\!\!\int_{\text{متوازی الاضلاع}} ۱ \cdot dV_{x,y} &= \text{(مساحت متوازی الاضلاع)} \\ &= |\int_{C_۱}^{C'_۱}\int_{C_۲}^{C'_۲} \frac{۱}{|A_۱B_۲ - A_۲B_۱|} dudv| \end{aligned}$$

(قدرمطلق بیرونی بدین سبب است که معلوم نیست C_i و C'_i، $i = ۱, ۲$، کدام بزرگترند.)

$$= \frac{|C'_۱ - C_۱||C'_۲ - C_۲|}{|A_۱B_۲ - A_۲B_۱|}$$

شکل ۷

(۳۴—۳)توضیح در مورد اثبات قضیه (۳۴—۱) ارائه اثبات کامل این قضیه از حد بحث ما کمی خارج است ولی می‌توان به اصول اساسی آن با توجه به بازبینی فرمول (۱) که در آغاز جلسه مطرح شد پی برد. حالتی را در نظر بگیرید که W' (در قضیه) یک مستطیل nـ بعدی است (در هر صورت، طبق تعریف، همهٔ انتگرال‌گیری‌های ما به انتگرال‌گیری روی مستطیل تحویل شد). تحت اثر φ، W' به ناحیهٔ W نگاشته می‌شود که حجم nـ بعدی آن می‌تواند متفاوت از حجم W باشد، یا حتی اگر برابر باشد در بعضی قسمت‌ها گسترده‌تر شده و در بعضی نواحی دیگر فشرده‌تر شده باشد (شکل ۸ حالت دو بعدی را نشان می‌دهد)، چگونه می‌توان به یک ضریب ”تصحیح تغییر حجم پایه“، مانند $\varphi'(\tau)$ در حالت یک بعدی، دست یافت؟ مستطیل W' را با ترسیم ابرصفحه‌هایی به موازات ابرصفحه‌های مختصاتی به قطعات کوچکتر افراز می‌کنیم و تصویر این

شکل ۸

برای هر زیرمستطیل کوچک نقطه‌ای p در آن اختیار می‌کنیم. اگر این زیرمستطیل به اندازه کافی کوچک باشد حجم تصویر آن حدوداً برابر حجم تصویر آن تحت تقریب خطی یعنی $D\varphi(p)$ است. تحت اثر تابع‌های خطی حجم nـ بعدی متوازی‌السطوح در $|\det D\varphi(p)|$ ضرب می‌شود، بنابراین $|\det D\varphi(p)|$ به طور تقریب ضریب "تصحیح تغییر حجم پایه" مناسب است. بدین ترتیب می‌توان انتظار داشت که $\sum(f\circ\varphi)(p)\cdot|\det D\varphi(p)|$ (مجموع نسبت به زیرمستطیل‌های افراز W') تقریب مناسبی برای $\int_W f$ باشد. با میل دادن ضخامت افراز به صفر، می‌توان نشان داد که مجموع فوق به انتگرال $\int_{W'}(f\circ\varphi)|\det D\varphi|$ میل می‌کند.

(۴ـ۳۴) <u>انتگرال‌های ناسره</u> در حالت یک بعدی علی الاصول دو نوع "انتگرال ناسره" وجود دارد که همهٔ انتگرال‌های ناسره مجموعی از آنها هستند. یک مورد حالتی است که تابع کراندار می‌ماند ولی بازهٔ انتگرال‌گیری از یک سو بی‌کران می‌شود. این انتگرال‌ها به $\int_a^\infty f$ یا $\int_{-\infty}^a f$ نمایش داده می‌شوند. مثلاً $\int_a^\infty f=\lim_{b\to\infty}(\int_a^b f)$. نوع دیگر انتگرال ناسره به وضعیتی اطلاق می‌شود که بازهٔ انتگرال‌گیری کراندار است ولی وقتی متغیر به یکی از دو نقطهٔ انتهایی بازه میل می‌کند تابع بی‌کران می‌شود. مثلاً اگر $f(x)\longrightarrow\infty$ وقتی $x\longrightarrow b^-$، $\int_a^b f$، در صورت وجود، برابر $\lim_{\varepsilon\to ۰^+}\int_a^{b-\varepsilon} f$ است. در حالت $n\geq ۲$، شیوهٔ بی‌کران شدن ناحیهٔ انتگرال‌گیری بی‌نهایت تنوع دارد، و نیز به جای فقط دو نقطهٔ مرزی، مرز یک ناحیه کراندار ممکن است دارای بی‌نهایت نقطه باشد که تابع ممکن است در نزدیکی هر یک بی‌کران شود. بدین ترتیب موضوع انتگرال ناسره برای توابع چند متغیری می‌تواند بسیار پیچیده‌تر شود. در اینجا توجه خود را به ناحیه‌های نوع زیر محدود می‌کنیم:

۱) یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری که از آن تعدادی متناهی نقطه حذف شده باشد.

۲) $\mathbb{R}^n$ یا $\mathbb{R}^n-\{p_۱,\ldots,p_k\}$، یعنی $\mathbb{R}^n$ که از آن تعدادی متناهی نقطه حذف شده باشد.

۳) بخشی X از $\mathbb{R}^n$ که محصور به تعدادی متناهی ابرصفحه در $\mathbb{R}^n$ باشد، یا $X-\{p_۱,\ldots,p_k\}$

برای نوع (۳) می‌توان مثلاً ناحیه $\{(x_۱,\ldots,x_n)\mid x_i\geq ۰, i=۱,\ldots,n\}$ را مثال زد. علاوه بر این محدودیت، فقط تابع‌های غیرمنفی را در نظر می‌گیریم (مشابهاً می‌توان توابع غیرمثبت را در نظر

گرفت). قضیهٔ زیر را بدون اثبات مورد استفاده قرار می‌دهیم.

(۵–۳۴) قضیه فرض کنید D یک ناحیهٔ در $\mathbb{R}^n$ از نوع بالا باشد و $(D_n)_{n=۱}^{\infty}$ یک دنباله از زیرمجموعه‌های بسته، کراندار و مجاز انتگرال‌گیری از $\mathbb{R}^n$ به طوری که:

$$D_۱ \subset D_۲ \subset D_۳ \subset \cdots \quad , \quad \bigcup_{n=۱}^{\infty} D_n = D$$

اگر $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و نامنفی باشد و $\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$ وجود داشته باشد، آنگاه برای هر دنباله $(D'_n)_{n=۱}^{\infty}$ دیگر با شرایط ذکر شده برای $(D_n)_{n=۱}^{\infty}$، $\lim_{n\to\infty} \int_{D'_n} f$ وجود دارد و برابر $\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} f$ است.

این حد مشترک را انتگرال ناسرهٔ f روی D می‌نامیم و در صورت وجود حد می‌گوییم $\int_D f$ همگراست. لازم به ذکر است که اگر f همه‌جا غیرمنفی (یا همه‌جا غیرمثبت) نباشد، شکل نواحی D_n می‌تواند بر نتیجه نهایی، یعنی حد $\int_{D_n} f$ اثر بگذارد. این پدیده در حالت یک متغیری نیز دیده می‌شود. مثلاً برای تابع $f(x) = \frac{۱}{x}$ که روی بازهٔ محذوف $[-۱, ۱] - \{۰\}$ تعریف شده و پیوسته است، اگر D_n را برابر $[-۱, \frac{-۱}{n}] \cup [\frac{۱}{n}, ۱]$ بگیریم، داریم $\int_{D_n} f = ۰$ و در نتیجه حد این انتگرال‌ها صفر است. ولی برای $D'_n = [-۱, \frac{-۱}{n}] \cup [\frac{۱}{۲n}, ۱]$ داریم $\int_{D'_n} f = \ln ۲$ که حد آن نیز $\ln ۲$ است.

مثال در مورد همگرایی انتگرال ناسرهٔ $\int\int_{\mathbb{R}^۲} e^{-(x^۲+y^۲)} dA$ بحث کنید.

حل D_n را گوی بستهٔ شعاع n حول مبدأ می‌گیریم، $\bigcup D_n = \mathbb{R}^۲$. داریم:

$$\begin{aligned}
\int\int_{D_n} e^{-(x^۲+y^۲)} dA &= \int_۰^{۲\pi} \int_۰^n e^{-r^۲} r dr d\theta \\
&= (۲\pi)(-\tfrac{۱}{۲}) e^{-r^۲}|_۰^n \\
&= \pi(۱ - e^{-n^۲})
\end{aligned}$$

وقتی $n \longrightarrow \infty$، مقدار فوق به π میل می‌کند، پس $\int\int_{\mathbb{R}^۲} e^{-(x^۲+y^۲)} dA$ همگراست و برابر π می‌باشد.

کاربرد نشان می‌دهیم $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx$ همگراست و برابر $\sqrt{\pi}$ می‌باشد. مقصود از $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^۲} dx$،

$\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a} e^{-x^۲}dx$ است هر چند که به سبب مثبت بودن $e^{-x^۲}$ نتیجه می‌شود که لازم نیست حدود انتگرال لزوماً متقارن گرفته شوند. توجه کنید که $\int_{-a}^{a} e^{-x^۲}dx = \int_{-a}^{a} e^{-y^۲}dy$ پس اگر $\int_{-a}^{a} e^{-x^۲}dx$ را I_a بنامیم، داریم $\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} e^{-(x^۲+y^۲)}dxdy = I_a^۲$. ناحیهٔ انتگرال‌گیری مربع $-a \leq x, y \leq a$ است. اگر این مربع را D'_a بنامیم، داریم $D'_۱ \subset D'_۲ \subset D'_۳ \subset \cdots$ و $\bigcup_{n=۱}^{\infty} D'_n = \mathbb{R}^۲$، پس طبق قضیه و مثال قبل $\lim_{n\to\infty} I_n^۲ = \pi$. نتیجه این که $\lim_{n\to\infty} I_n = \sqrt{\pi}$. این حد در نظریه احتمال زیاد به‌کار می‌رود.