محاسبهٔ انتگرال چندگانه

پس از بحث در مورد کلیات انتگرال که در بخش قبل گذشت، اکنون به تشریح روش محاسبهٔ انتگرال چندگانه می‌پردازیم. مقدمتاً ذکر یکی دو نکته در مورد نمادها لازم است. انتگرال تابع f روی مجموعهٔ D از $\mathbb{R}^n$ را تاکنون به $\int_D f$ نمایش داده‌ایم. برای تأکید n بعدی بودن ناحیهٔ D، بعضی نماد $\int \cdots \int_D f$ (با n بار $\int$) را به‌کار می‌برند. همچنین اگر نقاط D به $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ نمایش داده شده باشند، نماد $\int \cdots \int f(x_۱, \ldots, x_n) dV$ یا $\int \cdots \int f(x_۱, \ldots, x_n) dV_x$ نیز به‌کار گرفته می‌شود. گاهی از dV به عنوان "عنصر حجم nـ بعدی" یاد می‌شود. در حالت دو بعدی، $n = ۲$، به جای dV معمولاً از dA ("عنصر سطح") استفاده می‌شود.

محاسبهٔ انتگرال را با انتگرال دوگانه روی مستطیل آغاز می‌کنیم. قضیهٔ زیر راهگشای حالت کلی است.

(۳۳−۱) <u>قضیه</u> فرض کنید مستطیل بستهٔ $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ و تابع انتگرال‌پذیر $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است. در این صورت:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b [\int_c^d f(x,y)dy]dx \qquad (۱)$$

$$= \int_c^d [\int_a^b f(x,y)dx]dy \qquad (۲)$$

نخست برای (۱) (معادلاً (۲)) یک تعبیر هندسی ارائه می‌کنیم. حالت $f(x,y) \geq ۰$ را در نظر بگیرید. در انتگرال داخلی (۱)، برای x ثابت یک انتگرال‌گیری نسبت به y انجام شده است. این به منزلهٔ محاسبهٔ مساحت مقطع ثابت $= x$ در زیر نمودار f است. بنابراین (۱) بیانگر این مطلب است که برای محاسبهٔ حجم زیر نمودار، برای هر x ثابت مساحت مقطع مربوط زیر نمودار را محاسبه می‌کنیم که تابعی از x می‌شود سپس با محاسبهٔ انتگرال این تابع مساحت برای $a \leq x \leq b$، حجم مورد نظر را

به‌دست می‌آوریم. در واقع حجم زیر نمودار از انباشتن لایه‌های بینهایت نازک به‌ازای x های ثابت گوناگون به‌دست می‌آید.

تعبیر دیگر (۱) را می‌توان بر اساس مجموع‌های ریمان ارائه کرد. فرض کنید افراز $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = b$ برای $[a,b]$ و افراز $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = d$ برای $[c,d]$ در نظر گرفته شوند و در زیرمستطیل $R_{ij} : x_{i-1} \leq x \leq x_i$ و $y_{j-1} \leq y \leq y_j$، نقطهٔ دلخواهی z_{ij} در نظر بگیرید. مجموع ریمان مربوط عبارت است از

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f(z_{ij})\cdot(y_j-y_{j-1})(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p}(\sum_{j=1}^{q} f(z_{ij})(y_j-y_{j-1}))(x_i-x_{i-1}) \qquad (3)$$

در پرانتز داخلی، برای i ثابت، نسبت به j جمعبندی شده است. برای گذر به حد، باید $(x_i - x_{i-1})$ ها و $(y_j - y_{j-1})$ ها تواماً به صفر میل کنند. فرمول (۱) بیانگر این است که تحت شرایط انتگرال‌گیری می‌توان نخست برای x ثابت گذر به حد را با کوچک کردن $(y_j - y_{j-1})$ انجام داد و سپس حاصل را که وابسته به x است مجدداً با سوق دادن $(x_i - x_{i-1})$ به صفر حدگیری کرد. با دقیق‌تر کردن این ایده می‌توان اثبات کاملی از (۱) ارائه کرد ولی این کار در اینجا انجام نخواهد شد.

<u>مثال ۱</u> انتگرال تابع $f(x) = x^2y + e^{-2y}$ را روی مستطیل $1 \leq x \leq 2$، $0 \leq y \leq 1$ محاسبه کنید. این محاسبه را از هر دو روش (۱) و (۲) انجام می‌دهیم. اگر R مستطیل فوق باشد:

$$\begin{aligned}
\int\int_R (x^2y + e^{-2y})dA &= \int_1^2 [\int_0^1 (x^2y + e^{-2y})dy]dx \qquad \text{از فرمول (۱)}\\
&= \int_1^2 [\frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{2}e^{-2y}]|_0^1 dx\\
&= \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2})dx\\
&= [\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}(1-e^{-2})x]|_1^2\\
&= \frac{8}{6} + (1-e^{-2}) - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(1-e^{-2}) = \frac{5}{3} - \frac{1}{2}e^{-2}
\end{aligned}$$

$$\int\int_R (x^2y+e^{-2y})dA = \int_0^1 [\int_1^2 (x^2y+e^{-2y})dx]dy \quad \text{از فرمول (۲)}$$
$$= \int_0^1 [\frac{1}{2}x^3y - e^{-2y}x]|_1^2 dx$$
$$= \int_0^1 (\frac{7}{3}y+e^{-2y})dy$$
$$= (\frac{7}{6}y^2 - \frac{1}{2}e^{-2y})|_0^1 = \frac{7}{6} - \frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} - \frac{1}{2}e^{-2}$$

قضیه (۳۳—۱) تعمیمی واضح به حالت مستطیل nـ بعدی دارد. به طور کلی می‌توان یک انتگرال روی مستطیل n بعدی را به $n!$ نوع مختلف به عنوان انتگرال مکرر بیان کرد.

<u>مثال ۲</u> انتگرال تابع $f(x,y,z) = x + e^{-y+z}$ را روی مستطیل R با مشخصات $1 \leq x \leq 2$، $0 \leq y \leq 1$، $0 \leq z \leq 2$، محاسبه کنید. این انتگرال را به یکی از شش ترتیب ممکن محاسبه می‌کنیم.

$$\int\int\int_R (x+e^{-y+z})dV = \int_0^2 [\int_0^1 [\int_1^2 (x+e^{-y+z})dx]dy]dz$$
$$= \int_0^2 [\int_0^1 [(\frac{1}{2}x^2 + e^{-y+z}x)|_1^2]dy]dz$$
$$= \int_0^2 [\int_0^1 (\frac{3}{2} + e^{z-y})dy]dz$$
$$= \int_0^2 (\frac{3}{2}y - e^{z-y})|_0^1 dz$$
$$= \int_0^2 (\frac{3}{2} - e^{z-1} + e^z)dz$$
$$= (\frac{3}{2}z - e^{z-1} + e^z)|_0^2 = 3 - e + e^2 + e^{-1} - 1$$
$$= 2 - e + e^2 + e^{-1}$$

برای محاسبهٔ انتگرال روی ناحیه‌های غیر مستطیل شکل، به روش زیر عمل می‌کنیم. اگر ناحیهٔ مجاز D و تابع انتگرال‌پذیر $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد، مانند جلسه قبل، D را در یک مستطیل R جای داده، تابع f را به تابعی $\widetilde{f}$ توسعه می‌دهیم که در R تعریف شده ولی خارج D صفر است، به عنوان مثال مورد زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید تابع‌های $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده‌اند که $\alpha(x) \leq \beta(x)$

برای هر x در $[a,b]$. ناحیه D به شکل زیر را یک ناحیهٔ <u>yـ محدب</u> می‌نامیم:

$$D:\begin{cases} a \leq x \leq b \\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x) \end{cases}$$

حال ناحیهٔ yـ محدب D را در مستطیل R با تعریف $a \leq x \leq b$، $c \leq y \leq d$، که $c \leq \alpha(x) \leq \beta(x) \leq d$ قرار می‌دهیم و داریم:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int\int_R \widetilde{f}\ (x,y)dA = \int_a^b [\int_c^d \widetilde{f}\ (x,y)dy]dx$$

برای x ثابت، $\widetilde{f}\ (x,y)$ به‌ازای $y < \alpha(x)$ و $y > \beta(x)$ صفر است، پس

$$\int_c^d \widetilde{f}\ (x,y) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dx$$

و در نتیجه:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_a^b [\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dy]dx \qquad (۴)$$

ضمناً توجه کنید که اگر α و β پیوسته باشند، همچنان که در درس قبل دیدیم نمودار هر یک، یک مجموعهٔ دارای اندازهٔ صفر دو بعدی خواهد بود و ناحیهٔ D یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری است.

به همین ترتیب یک ناحیهٔ xـ محدب ناحیه‌ای با توصیف زیر است:

$$D:\begin{cases} c \leq y \leq d \\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y) \end{cases}$$

و اگر تابع‌های γ و δ پیوسته باشند، D یک ناحیهٔ مجاز انتگرال‌گیری خواهد بود.

برای این نوع ناحیه به ترتیب قبل خواهیم داشت:

$$\int\int_D f(x,y)dA = \int_c^d [\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)dx]dy \qquad (۵)$$

<u>مثال ۳</u> ربع گوی زیر را در نظر بگیرید:

$$D:\begin{cases} ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۱ \leq y \leq ۱ + \sqrt{۱ - x^۲} \end{cases}$$

می‌خواهیم $\int\int_D xdA$ را محاسبه کنیم. طبق فرمول (۴) داریم:

$$\begin{aligned}\int\int_D xdA &= \int_0^1 [\int_1^{1+\sqrt{1-x^2}} xdy]dx \\ &= \int_0^1 (xy)|_1^{1+\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx \\ &= (-\tfrac{1}{2})(\tfrac{2}{3})(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

ناحیهٔ D، xـ محدب نیز هست و می‌توان آن را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\begin{cases} 1 \leq y \leq 2 \\ 0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2} \end{cases}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\int\int_D xdA &= \int_1^2 [\int_2^{\sqrt{2y-y^2}} xdx]dy \\ &= \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2)|_0^{\sqrt{2y-y^2}} dy \\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 (2y-y^2)dy \\ &= (\tfrac{1}{2})(y^2-\tfrac{1}{3}y^3)|_1^2 = \tfrac{1}{3}\end{aligned}$$

گاهی اوقات محاسبهٔ یک انتگرال به یکی از دو روش (۴) یا (۵) مقدور نیست یا دشوار است ولی به روش دیگر امکان‌پذیر است. مثال زیر نمونه‌ای از این وضعیت است.

<u>مثال ۴</u> می‌خواهیم انتگرال تابع $f(x,y) = e^{-y^2}$ را روی ناحیهٔ مثلثی زیر محاسبه کنیم:

$$T : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 1 \end{cases}$$

اگر این ناحیه را به شکل yـ محدب تلقی کنیم، داریم:

$$\int\int_T e^{-y^2} dA = \int_0^1 [\int_x^1 e^{-y^2} dy]dx$$

در اینجا به این مشکل بر می‌خوریم که تابع اولیهٔ e^{-y^2} را نمی‌شناسیم و ادامه محاسبه به این طریق عملی نیست. ولی اگر T را به صورت xـ محدب بنویسیم، نتیجه حاصل خواهد شد:

$$T:\begin{cases} 0 \leq y \leq 1 \\ 0 \leq x \leq y \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int\int_T e^{y^2} dA &= \int_0^1 [\int_0^y e^{y^2} dx] dy \\
&= \int_0^1 (e^{-y^2} x)|_0^y dy \\
&= \int_0^1 e^{-y^2} y dy \\
&= (-\tfrac{1}{2}) e^{-y^2}|_0^1 = (-\tfrac{1}{2})(e^{-1} - 1)
\end{aligned}$$

روشی که برای محاسبهٔ انتگرال برای ناحیه‌های دو بعدی غیر مستطیل شکل ذکر شد به حالت n بعدی نیز تعمیم‌پذیر است و اگر بتوانیم ناحیهٔ D در $\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر توصیف کنیم:

$$\begin{cases} \alpha_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \leq x_n \leq \beta(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ \vdots \\ \alpha_2(x_1) \leq x_2 \leq \beta_2(x_1) \\ \alpha_1 \leq x_1 \leq \beta_1 \end{cases}$$

آنگاه $\int \cdots \int_D f$ را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\int \cdots \int_D f = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{\alpha_2(x_1)}^{\beta_2(x_1)} [\cdots [\int_{\alpha_n(x_1,\ldots,x_{n-1})}^{\beta_n(x_1,\ldots,x_{n-1})} f(x_1, \ldots, x_n) dx_n] dx_{n-1} \cdots] dx_1 \qquad (۷)$$

البته هر ترتیب دیگری از متغیرهای $x_1, \ldots, x_n$ نیز ممکن است به‌کار رود. توجه کنید که در هر مرحلهٔ انتگرال‌گیری در فرمول (۷) حداقل یکی از متغیرها از بین می‌رود به طوری که در مرحلهٔ آخر فقط یک انتگرال‌گیری یک متغیری با حدود عددی باقی می‌ماند.

مثال ۵ حجم ناحیهٔ محصور به $z \geq x^2 + y^2$ و داخل استوانهٔ $x^2 + (z-2)^2 = 1$ را به کمک انتگرال سه‌گانه محاسبه کنید.

ناحیهٔ مورد نظر را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$D:\begin{cases} -\sqrt{z-x^۲}\leq y\leq \sqrt{z-x^۲} \\ ۲-\sqrt{۱-x^۲}\leq z\leq ۲+\sqrt{۱-x^۲} \\ -۱\leq x\leq ۱ \end{cases}$$

بنابراین

$$\int\int\int_D ۱dV=\int_{-۱}^{۱}[\int_{۲-\sqrt{۱-x^۲}}^{۲+\sqrt{۱-x^۲}}[\int_{-\sqrt{z-x^۲}}^{\sqrt{z-x^۲}}dy]dz]dx$$

و با سه بار انتگرال‌گیری حجم مورد نظر به‌دست می‌آید.

<u>مثال ۶</u> حجم ناحیهٔ محصور بین دو استوانه $x^۲+y^۲=a^۲$ و $x^۲+z^۲=a^۲$ را محاسبه کنید $(a>۰)$.

توجه کنید که این جسم روی گوی $x^۲+y^۲\leq a^۲$ بنا شده است، جدار بالای آن روی نیمهٔ بالایی سطح استوانه $x^۲+z^۲=a^۲$ و جدار پایینی آن روی نیمهٔ پایینی سطح همین استوانه قرار دارد. ناحیهٔ سه بعدی را می‌توان به صورت زیر توصیف کرد:

$$D:\begin{cases} -\sqrt{a^۲-x^۲}\leq z\leq \sqrt{a^۲-x^۲} \\ -\sqrt{a^۲-x^۲}\leq y\leq \sqrt{a^۲-x^۲} \\ -a\leq x\leq a \end{cases}$$

پس

$$\int\int\int_D ۱dV=\int_{-a}^{a}[\int_{-\sqrt{a^۲-x^۲}}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}[\int_{-\sqrt{a^۲-x^۲}}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}dy]dz]dx$$

<u>مثال ۷</u> حجم چهار بعدی گوی $x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲+x_۴^۲\leq R^۲$ در $\mathbb{R}^۴$ را محاسبه کنید.

این ناحیه را می‌توان به شکل زیر توصیف کرد:

$$D:\begin{cases} -\sqrt{R^۲-(x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲)}\leq x_۴\leq \sqrt{R^۲-(x_۱^۲+x_۲^۲+x_۳^۲)} \\ -\sqrt{R^۲-(x_۱^۲+x_۲^۲)}\leq x_۳\leq \sqrt{R^۲-(x_۱^۲+x_۲^۲)} \\ -\sqrt{R^۲-x_۱^۲}\leq x_۲\leq \sqrt{R^۲-x_۱^۲} \\ -R\leq x_۱\leq R \end{cases}$$

می‌توان به روش ذکر شده به نتیجه رسید ولی با توجه به این که فرمول حجم گوی سه بعدی را می‌دانیم، محاسبه را می‌توان در یک گام خلاصه کرد. توجه کنید که برای $x_۱$ ثابت، مقطع این گوی، یک گوی سه بعدی به شعاع $\sqrt{R^۲ - x_۱^۲}$ است که حجم سه بعدی آن $\frac{۴}{۳}\pi(R^۲ - x_۱^۲)^{\frac{۳}{۲}}$ می‌باشد این در واقع نتیجه سه انتگرال‌گیری اول روی ناحیهٔ بالا است. بنابراین

$$\text{حجم گوی چهار بعدی} = \int_{-R}^{R} \frac{۴}{۳}\pi(R^۲ - x_۱^۲)^{\frac{۳}{۲}} dx_۱$$

با قرار دادن $x_۱ = R\sin\theta$، انتگرال بالا تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}(\frac{۴}{۳}\pi)\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} (R^۳\cos^۳\theta)(R\cos\theta)d\theta &= (\frac{۴}{۳}\pi R^۴)\int_{-\frac{\pi}{۲}}^{\frac{\pi}{۲}} \cos^۴\theta d\theta \\ &= (\frac{۴}{۳}\pi R^۴)(\frac{۳\pi}{۸}) = \frac{\pi^۲}{۲}R^۴\end{aligned}$$

بالاخره این نکته در مورد نماد انتگرال مکرر قابل ذکر است که معمولاً کروشه‌ها نوشته نمی‌شوند و مقصود از نماد $\int\cdots\int f(x_۱,\ldots,x_n)dx_۱\ldots dx_n$ این است که انتگرال‌گیری از داخل به خارج به ترتیب نسبت به $x_۱$، بعد نسبت به $x_۲$، ...و نهایتاً نسبت به x_n انجام می‌شود.