انتگرال چندگانه

یکی از دو رکن اصلی حساب دیفرانسیل و انتگرال، فرایند انتگرال‌گیری است. یک تعبیر متداول از انتگرال $\int_a^b f$ وقتی f تابعی نامنفی و تعریف شده روی $[a,b]$ باشد، اندازهٔ مساحت زیر نمودار تا محور x بین a و b است. در اینجا می‌خواهیم مفهوم انتگرال تابع‌های تعریف شده روی ناحیه‌های واقع در $\mathbb{R}^n$ را بررسی کنیم. یک تفاوت فوری که به ذهن می‌رسد تنوع شکل ناحیه‌ها در حالت دو بعدی و ابعاد بالاتر است. در حالت یک بعدی دامنهٔ تعریف تابع معمولاً یک بازه یا اجتماع چند بازه در نظر گرفته می‌شود و این در تقریباً همهٔ موارد کفاف نیاز می‌کند. در حالت دو بعدی انواع ناحیه‌های محصور به پاره‌خط یا قطعه خم را می‌توان تصور کرد که به طور طبیعی در مسائل گوناگون ظاهر می‌شوند. مثلاً در شکل ۱، ناحیهٔ داده شده ممکن است یک صفحه نازک با چگالی متغیر $\rho(x,y)$ باشد. برای محاسبه جرم این صفحه باید از $\rho(x,y)$ در سراسر ناحیه "انتگرال‌گیری" شود. برای مطرح ساختن مفهوم انتگرال در بعد ۲ به بالا، نخست مفهوم انتگرال را روی "مستطیل" که تعمیم طبیعی بازه است مطرح می‌کنیم، سپس به ناحیه‌های پیچیده‌تر می‌پردازیم.

شکل ۱

فرض کنید $2n$ عدد حقیقی $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ داده شده‌اند که $a_1 \leq b_1$، ...، $a_n \leq b_n$. مجموعهٔ زیر یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^n$ خوانده می‌شود:

$$R = \{(x_1,\ldots,x_n) \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1,\ldots,a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

اصطلاح "بسته" ارجاع به علامت $\leq$ است. وقتی به جای $\leq$، نماد $<$ به‌کار برده شود، یک "مستطیل باز" تعریف می‌شود و در صورت اختلاط $<$ و $\leq$، انواع مستطیل‌ها که شامل بخشی از مرز خود می‌شوند به‌دست می‌آیند. مقصود از یک افراز R، تجزیهٔ R به زیرمستطیل‌هایی از همین نوع به شکل دقیق زیر

است. برای هر مؤلفه، مثلاً مؤلفهٔ iــ ام، بازهٔ $[a_i, b_i]$ را به صورت زیر افراز می‌کنیم:

$$a_i = a_{i\circ} \leq a_{i\text{١}} \leq \cdots \leq a_{i,p_i} = b_i$$

p_i تعداد زیربازه‌هایی است که $[a_i, b_i]$ به آن تجزیه شده است. اگر این افراز برای هر مؤلفه انجام گیرد، تجزیه‌ای که برای R حاصل می‌شود مرکب از زیرمستطیل‌های به شکل زیر است:

$$a_{\text{١},j_\text{١}} \leq x_i \leq a_{\text{١},j_\text{١}+\text{١}}, \ldots, a_{n,j_n} \leq x_n \leq a_{n,j_n+\text{١}}$$

در شکل ۲، یک نمونه از زیرمستطیل‌های تجزیه هاشور زده شده است.

شکل ۲

حجم nــ بعدی مستطیل R را برابر حاصل‌ضرب طول اضلاع، یعنی $(b_\text{١} - a_\text{١}) \times \cdots \times (b_n - a_n)$ تعریف می‌کنیم. بدین ترتیب حجم R برابر مجموع حجم‌های زیرمستطیل‌های پدید آمده در افراز است. در حالت $n = \text{١}$، حجم ۱ــ بعدی همان طول، در حالت $n = \text{٢}$، حجم دو بعدی برابر مساحت، و برای $n = \text{٣}$، همان مفهوم حجم معمولی است.

حال فرض کنید تابعی کراندار $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است، می‌خواهیم مفهومی $\int_R f$ تعریف کنیم که موارد استفاده‌ای مشابه انتگرال روی یک بازهٔ $[a, b]$ را داشته باشد. بدین ترتیب در حالت دو بعدی، $n = \text{٢}$، اگر $f(x) \geq \circ$ برای هر x در R، آنگاه $\int_R f$ باید بیانگر "حجم" زیر نمودار $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ باشد. همچنین برای $n = \text{٢}$ و $n = \text{٣}$، اگر f در هر نقطهٔ R، چگالی منسوب به آن نقطه را بیان کند، $\int_R f$ باید جرم کل R باشد. به این منظور به روشی مشابه حالت یک بعدی عمل می‌کنیم. فرض کنید افرازی از R داده شده باشد و زیرمستطیل‌های افراز را $R_\text{١}, \ldots, R_p$ نامگذاری کنید. در هر R_i، نقطه‌ای Q_i به دلخواه انتخاب کنید و مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{i=\text{١}}^{p} vol(R_i) \cdot f(Q_i) \qquad (\text{١})$$

که در اینجا مقصود از $vol(R_i)$ حجم (nــ بعدی) R_i است. مجموع‌های به شکل (۱) را مجموع ریمان می‌نامند. در حالت دو بعدی مجموع فوق تقریب معقولی برای حجم زیر نمودار f است چه

$vol(R_i)\cdot f(Q_i)$ در واقع حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ مستطیل R_i در ارتفاع نمودار بالاسر Q_i است، یعنی حجم یک مکعب مستطیل. مجموع حجم‌های این مکعب مستطیل‌ها تقریبی است برای حجم زیر نمودار. به تقلید از حالت یک بعدی می‌خواهیم "حد" مجموع‌های ریمان را، وقتی "ضخامت افراز" به صفر میل می‌کند، حجم زیر نمودار یا انتگرال تابع f بنامیم. ضخامت افراز را می‌توان مثلاً به شکل $\max_{i,j}(a_{i,j+۱}-a_{i,j})$ تعریف کرد. تعریف دقیق انتگرال به صورت زیر است:

(۳۲—۱)<u>تعریف</u> تابع کراندار f روی مستطیل بستهٔ R تعریف شده است. اگر عددی I وجود داشته باشد با این ویژگی که به‌ازای هر $\varepsilon>۰$، $\delta>۰$ وجود داشته باشد که هرگاه ضخامت یک افراز R از δ کوچکتر باشد، آنگاه برای مجموع (۱) داشته باشیم:

$$|\text{مجموع ریمان} - I|<\varepsilon$$

در آن صورت f را <u>انتگرال‌پذیر روی R</u> خوانده و I را، که معمولاً به $\int_R f$ نمایش می‌دهیم، <u>انتگرال f روی R</u> می‌نامیم.

خواص زیر به روش‌هایی کاملاً مشابه حالت یک متغیری قابل اثبات هستند.

(۳۲—۲)<u>خواص ابتدایی انتگرال روی مستطیل</u>

(۳۲—۲—۱) <u>(خطی بودن)</u> اگر f,g روی R انتگرال‌پذیر باشند و c یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $f+g$ و cf روی R انتگرال‌پذیرند و

$$\int_R(f+g)=\int_R f+\int_R g \qquad (۲)$$

$$\int_R(cf)=c\int_R f \qquad (۳)$$

(۳۲—۲—۲) اگر f روی R انتگرال‌پذیر باشد و $f(x)\geq ۰$ برای هر x در R، آنگاه:

$$\int_R f\geq ۰$$

(۳۲—۲—۳) اگر f تابع ثابت $f(x)=k$ روی R باشد، f انتگرال‌پذیر است و:

$$\int_R f = k.vol(R) \tag{۴}$$

بدین ترتیب اگر از تابع ثابت با مقدار ۱ روی R انتگرال بگیریم عدد حاصل برابر حجم nـ بعدی R است.

(۳۲—۲—۴) اگر مستطیل R برابر اجتماع دو زیرمستطیل R' و R'' باشد که فقط در مرز اشتراک دارند و f روی هر یک از R' و R'' انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f روی R انتگرال‌پذیر است و

$$\int_R f = \int_{R'} f + \int_{R''} f \tag{۵}$$

شکل ۳

(۳۲—۳) مثال مهم: تابع پیوسته. فرض کنید $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد. می‌دانیم هر تابع پیوسته روی مجموعهٔ بسته و کراندار، کراندار است (در واقع حتی، ماکسیمم و مینیمم اتخاذ می‌کند). طبق قضیه‌ای که اثبات آن در اینجا نخواهد آمد، هر تابع پیوسته روی یک مجموعهٔ بسته و کراندار $\mathbb{R}^n$، در واقع به طور یکنواخت پیوسته است، بدین معنی که هرگاه $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، $\delta > ۰$ وجود دارد که برای هر دو عضو x, x' از دامنهٔ تابع که $|x - x'| < \delta$، داریم $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. تفاوت این امر با پیوستگی عادی در سراسر دامنه این است که در حالت عادی یک δ ی واحد ممکن است در سراسر دامنه برای ε داده شده کار نکند، بلکه به‌ازای هر x دامنه، باید $\delta > ۰$ مناسب آن نقطه یافت شود که هرگاه $|x - x'| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. به کمک مفهوم پیوستگی یکنواخت می‌توان نشان داد که هر تابع پیوسته روی مستطیل بسته انتگرال‌پذیر است. در واقع انتگرال‌پذیری محدود به تابع‌های پیوسته نیست. در حالت یک متغیری دیده‌ایم که تعدادی متناهی "جهش" در مقدار تابع اثری بر انتگرال‌پذیری ندارد. قضیه‌ای قاطع در این زمینه وجود دارد که طبق آن شرطی لازم و کافی برای انتگرال‌پذیری تابع کراندار f روی یک مستطیل nـ بعدی این است که نقاط

ناپیوستگی f مجموعاً "حجم nـ بعدی ناچیز" داشته باشد. تعریف دقیق چنین است: زیرمجموعهٔ S از $\mathbb{R}^n$ را دارای اندازهٔ صفر nـ بعدی می‌نامیم در صورتی که برای هر $\varepsilon > ۰$، دنباله‌ای $R_۱, R_۲, \ldots$ از مستطیل‌های nـ بعدی وجود داشته باشد که S را بپوشانند، یعنی $S \subset \bigcup_{i=۱}^{\infty} R_i$، و $\sum_{i=۱}^{\infty} vol(R_i) < \varepsilon$.

مثال ۱ هر مجموعهٔ متناهی در $\mathbb{R}^n$ اندازهٔ nـ بعدی صفر دارد. قرار دهید $S = \{p_۱, \ldots, p_k\}$. به مرکز p_i، مکعب nـ بعدی (یعنی مستطیل nـ بعدی با اضلاع برابر) به ضلع کوچکتر از $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{k}}$ در نظر بگیرید و آن را R_i بنامید. داریم $S \subset \bigcup_{i=۱}^{k} R_i$ و $vol(R_i) < \frac{\varepsilon}{k}$، پس $\sum vol(R_i) < \varepsilon$.

مثال ۲ در واقع مثال بالا را می‌توان به هر مجموعهٔ شمارا $S = \{p_۱, p_۲, \ldots\}$ تعمیم داد. حول p_i مکعبی R_i به ضلع کوچکتر از $\sqrt[n]{\frac{\varepsilon}{۲^i}}$ در نظر بگیرید. داریم $\sum_{i=۱}^{\infty} vol(R_i) < \sum_{i=۱}^{\infty} \frac{\varepsilon}{۲^i} = \varepsilon$.

مثال ۳ استدلال مشابه بالا نشان می‌دهد اگر $S_۱, S_۲, \ldots$ دنباله‌ای از مجموعه‌های با اندازهٔ nـ بعدی صفر باشد، اجتماع آنها نیز اندازهٔ صفر دارد. در واقع می‌توان S_k را با دنباله‌ای از مستطیل‌ها به مجموع کوچکتر از $\frac{\varepsilon}{۲^k}$ پوشاند. مجموعهٔ همهٔ این مستطیل‌ها یک پوشش شمارا برای اجتماع S_k ها می‌دهد و مجموع حجم مستطیل از ε کوچکتر است.

مثال ۴ فرض کنید R یک مستطیل بسته در $\mathbb{R}^{n-۱}$ با حجم $(n-۱)$ـ بعدی ناصفر V است و $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. نمودار f یک زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ است. نشان می‌دهیم نمودار f، به عنوان یک زیرمجموعه $\mathbb{R}^n$، دارای اندازهٔ nـ بعدی صفر است. برای $\frac{\varepsilon}{V}$، طبق پیوستگی یکنواخت f روی R، $\delta > ۰$ وجود دارد که هرگاه $|x - x'| < \delta$، آنگاه $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{V}$. افرازی از R در نظر می‌گیریم با ضخامت آنقدر کوچک که هر دو نقطه در یک زیرمستطیل افراز، فاصله کوچکتر از δ داشته باشند. حال برای هر زیرمستطیل $(n-۱)$ بعدی R_i از این افراز، مستطیلی n بعدی S_i به ترتیب زیر می‌سازیم. فرض کنید M_i و m_i به ترتیب ماکسیمم و مینیمم تابع پیوسته f روی R_i باشند. S_i را متشکل از نقاط $(x_۱, \ldots, x_{n-۱}, x_n)$ می‌گیریم که $(x_۱, \ldots, x_{n-۱})$ در R_i باشد و $m_i \le x_n \le M_i$. داریم

$$vol(S_i) = vol(R_i) \times (M_i - m_i)$$

که در طرف چپ $vol(S_i)$ حجم n بعدی است و در طرف راست، $vol(R_i)$، حجم $(n-1)$ بعدی. بنابر انتخاب $\delta > 0$، داریم $M_i - m_i < \frac{\varepsilon}{V}$، پس $vol(S_i) < \frac{\varepsilon}{V} vol(R_i)$. حال توجه کنید که S_i ها نمودار f را می‌پوشانند و

$$\sum_i vol(S_i) = \sum_i (vol(R_i) \times (M_i - m_i)) < \frac{\varepsilon}{V} \sum_i vol(R_i) = \varepsilon$$

مثال فوق وسیلهٔ سودمندی برای محاسبهٔ انتگرال روی ناحیه‌های غیرمستطیل شکل خواهد شد. اکنون به بررسی انتگرال روی مجموعه‌های غیرمستطیلی می‌پردازیم. فرض کنید D یک مجموعهٔ کراندار در $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع کراندار. چون D کراندار است، مستطیلی بسته R وجود دارد که $D \subset R$. تابع $\widetilde{f} : R \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\widetilde{f}\,(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ 0 & x \notin D \end{cases}$$

شکل ۴

حال اگر $\widetilde{f}$ روی R انتگرال‌پذیر باشد، چون $\widetilde{f}$ خارج D صفر است، طبیعی است که $\int_D f$ را برابر $\int_R \widetilde{f}$ تعریف کنیم. یک سؤال اساسی که بلافاصله مطرح می‌شود این است که حتی اگر f روی D پیوسته نباشد، جهش مقادیر $\widetilde{f}$ به صفر خارج از D می‌تواند ناپیوستگی در سراسر مرز D پدید آورد. بدین ترتیب اگر ناحیه D دارای این ویژگی باشد که مرز D اندازهٔ nـ بعدی صفر داشته باشد، آنگاه $\widetilde{f}$ روی R انتگرال‌پذیر خواهد شد مشروط بر این که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی f در D نیز یک مجموعه با اندازهٔ nـ بعدی صفر باشد (بالاخص اگر f روی D پیوسته باشد). ناحیه‌های کراندار D در $\mathbb{R}^n$ را که مرز دارای اندازهٔ nـ بعدی صفر داشته باشند ناحیه‌های مجاز خواهیم خواند. هر تابع پیوسته و کراندار روی یک چنین ناحیهٔ مجاز انتگرال‌پذیر می‌شود (اگر D به علاوه بسته باشد، یعنی شامل مرز خود باشد، تابع پیوستهٔ f روی D خود به خود کراندار می‌شود). اگر D یک ناحیهٔ مجاز در $\mathbb{R}^n$ باشد، حجم nـ بعدی D را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$vol(D) = \int_D 1$$

که در طرف راست، مقصود از ۱ تابع ثابت با مقدار ۱ روی D است.

اکنون می‌توانیم خواصی مشابه آنچه در (۳۲–۲) آمد برای انتگرال روی ناحیه‌های مجاز بیان کنیم. این خواص عموماً از (۳۲–۲) نتیجه می‌شوند:

(۳۲–۴) خواص ابتدایی انتگرال روی ناحیه‌های مجاز

(۳۲–۴–۱) (خطی بودن) اگر f, g روی ناحیهٔ مجاز D انتگرال‌پذیر باشند و c یک عدد حقیقی باشد، آنگاه $f+g$ و cf روی D انتگرال‌پذیرند و:

$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g \tag{۶}$$

$$\int_D (cf) = c\int_D f \tag{۷}$$

(۳۲–۴–۲) اگر f روی ناحیهٔ مجاز D انتگرال‌پذیر باشد و $f(x) \geq 0$ برای هر x در D، آنگاه:

$$\int_D f \geq 0 \tag{۸}$$

از (۳۲–۴–۲) و (۳۲–۴–۱) نتیجه می‌شود که اگر g, h روی ناحیهٔ مجاز D انتگرال‌پذیر باشند و $g(x) \geq h(x)$ برای هر x در D، آنگاه

$$\int_D g \geq \int_D h \tag{۹}$$

(۳۲–۴–۳) اگر f تابع ثابت $f(x) = k$ روی ناحیهٔ مجاز D باشد، آنگاه f روی D انتگرال‌پذیر است و

$$\int_D f = k \cdot vol(D) \tag{۱۰}$$

(۳۲—۴—۴) اگر ناحیهٔ مجاز D اجتماع دو ناحیهٔ مجاز D' و D'' باشد که فقط در مرز اشتراک دارند و f روی هر یک از D' و D'' انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه f روی D انتگرال‌پذیر است و

$$\int_D f = \int_{D'} f + \int_{D''} f \tag{۱۱}$$

زیرمجموعهٔ U از $\mathbb{R}^n$ را همبند مسیری می‌نامیم در صورتی که برای هر دو نقطهٔ A, B از U، خمی پیوسته $\gamma : [a, b] \longrightarrow U$ وجود داشته باشد که $\gamma(a) = A$ و $\gamma(b) = B$.

(۳۲—۴—۵) (قضیهٔ میانگین انتگرال) فرض کنید D یک ناحیهٔ بسته و همبند مسیری در $\mathbb{R}^n$ باشد و $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته. در این صورت نقطه‌ای P در D وجود دارد که:

$$\int_D f = f(P) \cdot vol(D) \tag{۱۲}$$

اثباتی از این حکم ارائه می‌کنیم. چون f پیوسته است روی مجموعهٔ بسته و کراندار D در نقطه‌ای A مینیمم و در نقطه‌ای B ماکسیمم خود را اتخاذ می‌کند، $f(A) = m$ و $f(B) = M$. برای هر x در D داریم $m \leq f(x) \leq M$، پس بنابر (۹) و (۱۰):

$$m \cdot vol(D) \leq \int_D f \leq M \cdot vol(D)$$

یا

$$m \leq \frac{\int_D f}{vol(D)} \leq M \tag{۱۳}$$

چون D همبند مسیری فرض شده است، خمی پیوسته $\gamma : [a, b] \longrightarrow D$ وجود دارد که $\gamma(a) = A$ و $\gamma(b) = B$. پس $(f \circ \gamma)(a) = m$ و $(f \circ \gamma)(b) = M$. حال $f \circ \gamma$ تابعی پیوسته از $[a, b]$ به $\mathbb{R}$ است که در نقطه a مقدار m و در نقطهٔ b مقدار M را می‌گیرد. بنابر قضیهٔ مقدار بینی باید نقطه‌ای c در $[a, b]$ وجود داشته باشد که $(f \circ \gamma)(c) = \frac{\int_D f}{vol(D)}$. نقطهٔ $P = \gamma(c)$ در حکم قضیه صدق می‌کند.