بهینه‌سازی (۱)

مسائل بهینه‌سازی چند متغیری بدین صورت ارائه می‌شوند که تابعی $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، S: زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، داده شده است، و هدف یافتن ماکسیمم یا مینیمم مطلق f در مجموعهٔ S است. روش بخش ۲۷ تا حدودی جوابگوی این مسأله است به این مفهوم که اگر ماکسیمم یا می‌نیمم مورد نظر در یک نقطهٔ درونی مجموعهٔ S ظاهر شود و اگر f در این نقطه مشتق‌پذیر باشد، این نقطه یک نقطهٔ بحرانی تابع خواهد بود. روشن است که برای حل کامل مسأله، علاوه بر در نظر گرفتن نقاط بحرانی، باید نقاط نوع زیر نیز در نظر گرفته شوند تا با مقایسهٔ مقدار f در این نقاط و نقاط بحرانی جواب نهایی مسأله معلوم گردد. این نقاط عبارتند از:

۱) نقاط مرزی ناحیه تعریف تابع.

۲) نقاط تکین، یعنی نقاطی که در آن f مشتق‌پذیر نیست.

اگر S یک مجموعهٔ بسته (شامل کلیهٔ نقاط مرزی) و کراندار باشد، می‌دانیم هر تابع پیوسته $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ روی S ماکسیمم و مینیمم مطلق اتخاذ می‌کند، بنابراین اگر S بسته و کراندار و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، مقایسه نتایج به‌دست آمده از نقاط بحرانی، نقاط مرزی و نقاط تکین قطعاً جواب مورد نظر را به‌دست خواهد داد. در حالتی که مجموعه S بی‌کران باشد، یا بعضی نقاط مرزی خود را شامل نشود، امکان دارد که ماکسیمم یا مینیمم در S موجود نباشد. برای این‌گونه مجموعه‌ها باید رفتار تابع $f(x)$ را وقتی x به یک نقطهٔ مرزی خارج S نزدیک می‌شود و نیز وقتی $|x| \longrightarrow \infty$ (در داخل مجموعهٔ S، وقتی S بی‌کران است) جداگانه بررسی کرد. امکان دارد در این موارد اصلاً ماکسیمم یا مینیمم وجود نداشته باشد. در زیر به ذکر دو مثال می‌پردازیم.

مثال ۱ ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = x^۲ + y^۲ + x$ را در ناحیهٔ $x^۲ + y^۲ \leq ۱$ به‌دست آورید.

حل ناحیه داده شده گوی بستهٔ شعاع ۱ حول مبدأ در $\mathbb{R}^{۲}$ است که بسته و کراندار می‌باشد. تابع داده شده به‌ازای هر (x,y) مشتق‌پذیر است، پس نقطهٔ تکین وجود ندارد. کافی است نقاط بحرانی و نقاط مرزی را بررسی و مقایسه کنیم. برای نقاط بحرانی:

$$\nabla f(x,y) = (۲x + ۱, ۲y) = (۰, ۰)$$

نتیجه می‌دهد $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$ تنها نقطهٔ بحرانی است، و $f(-\frac{۱}{۲}, ۰) = -\frac{۱}{۴}$. نقاط مرزی دقیقاً آن (x,y) ها هستند که $x^{۲} + y^{۲} = ۱$، پس در یک نقطهٔ مرزی $f(x,y) = x + ۱$ و از آنجا که برای نقاط مرزی $-۱ \leq x \leq ۱$، نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم f روی مرز در نقطهٔ $(۱, ۰)$ و مینیمم آن در نقطهٔ $(-۱, ۰)$ به‌دست می‌آید. داریم $f(۱, ۰) = ۲$ و $f(-۱, ۰) = ۰$. از مقایسه سه مقدار به‌دست آمده نتیجه می‌گیریم که ماکسیمم تابع برابر ۲ است و در نقطهٔ مرزی $(۱, ۰)$ ظاهر می‌شود، در حالی که مینیمم آن، $-\frac{۱}{۴}$، در نقطهٔ بحرانی درونی $(-\frac{۱}{۲}, ۰)$ حاصل می‌شود.

مثال ۲ ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y) = \frac{|xy|}{x^{۲}+y^{۲}+۱}$ را در $\mathbb{R}^{۲}$ به‌دست آورید.

حل وجود قدرمطلق نشان می‌دهد تابع ممکن است وقتی $xy = ۰$ مشتق‌پذیر نباشد. در هر حال به‌ازای $xy = ۰$، یعنی روی اجتماع محورهای x, y، مقدار تابع صفر است که قطعاً مینیمم تابع می‌باشد زیرا که به‌ازای $xy \neq ۰$ مقدار تابع مثبت است. در خارج اجتماع محورها، کافی است مقدار تابع به‌ازای $x > ۰$، $y > ۰$ بررسی شود زیرا که به سبب قدرمطلق، تقارن نسبت به دو محور دیگر وجود دارد. در ربع اول داریم

$$\nabla f(x,y) = (\frac{y(y^{۲} + ۱ - x^{۲})}{(x^{۲} + y^{۲} + ۱)^{۲}}, \frac{x(x^{۲} + ۱ - y^{۲})}{(x^{۲} + y^{۲} + ۱)^{۲}})$$

برای $x > ۰$ و $y > ۰$، $\nabla f(x,y) = \underline{۰}$ جواب ندارد. زیرا که خم‌های $y^{۲} = ۱ + x^{۲}$ و $x^{۲} = ۱ + y^{۲}$ نقطهٔ مشترک ندارند، پس نقطهٔ بحرانی وجود ندارد. از سویی دیگر برای $x \neq ۰$ و $y \neq ۰$:

$$\frac{|xy|}{x^{۲} + y^{۲} + ۱} = \frac{\frac{|xy|}{x^{۲}+y^{۲}}}{۱ + \frac{۱}{x^{۲}+y^{۲}}} < \frac{۱}{۲}$$

و در امتداد خط $y=x$ مقدار تابع به $\frac{۱}{۲}$ میل می‌کند وقتی $x\longrightarrow +\infty$. نتیجه این که تابع ماکسیمم ندارد.

در مثال اول، مجموعهٔ مرزی، دایرهٔ $x^۲+y^۲=۱$ بود و تابع مورد نظر $f(x,y)=x^۲+y^۲+x$ روی این مجموعه به شکل سادهٔ $f(x,y)=۱+x$ خلاصه می‌شد. در حالت کلی، یافتن ماکسیمم یا مینیمم روی مرز یک مجموعهٔ می‌تواند دشوار باشد. مجموعه‌های مرزی که در عمل ظاهر می‌شوند معمولاً از یک یا چند قطعهٔ هموار تشکیل شده‌اند. "روش لاگرانژ" که در زیر می‌آید حربهٔ مؤثری برای یافتن نقاط ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید یک تابع به یک مجموعهٔ هموار (مثلاً مجموعهٔ تراز غیر بحرانی) است. به طور خاص وضعیت زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید S یک زیرمجموعه باز $\mathbb{R}^n$ است، $g:U\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته، و M یک مجموعهٔ تراز تابع g، مثلاً

$$M=\{x\in U \mid g(x)=c\}$$

در مثال‌های مورد نظر ما گاهی M مرز یک ناحیه است (مثلاً مرز ناحیه‌ای که در آن $g(x)\geq c$ یا ناحیه‌ای که در آن $g(x)\leq c$). فرض کنید تابع $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ نیز داده شده است که مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته دارد. می‌خواهیم نقاط ماکسیمم و مینیمم موضعی تحدید f به M را شناسایی کنیم.

(۱–۱٦) قضیهٔ لاگرانژ فرض کنید a یک نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی تحدید f به M باشد و a یک نقطهٔ بحرانی برای g نباشد، در این صورت $\nabla f(a)$ در نقطهٔ a بر M عمود است:

بدین ترتیب، چون a برای g بحرانی نیست، یعنی $\nabla g(a)\neq \underline{۰}$، عددی حقیقی λ وجود دارد که:

$$\nabla f(a)=\lambda\,\nabla\, g(a)$$

توجه کنید که $\nabla g(a)\neq\underline{۰}$ نشان می‌دهد که مجموعهٔ تراز M حول a هموار است، پس عمود بودن $\nabla f(a)$ بر آن معنی دارد، این در واقع به معنی عمود بودن بر کلیه بردارهای مماس بر M در نقطهٔ a است. فرض کنید v یک چنین بردار باشد. خمی هموار $\gamma:I\longrightarrow\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم که تصویر آن به تمامی روی M قرار گیرد، $\gamma(t)\in M$ برای هر $t\in I$، $\gamma(t_۰)=a$ و $\gamma'(t_۰)=v$، چون a یک نقطهٔ مینیمم موضعی (یا ماکسیمم موضعی) برای تحدید f به M است $f(\gamma(t))$ به‌ازای $t=t_۰$ دارای

شکل ۱

مینیمم موضعی (یا ماکسیمم موضعی) است، پس $\frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(t))|_{t=t_\circ} = \circ$. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$\circ = \frac{d}{dt}((f\circ\gamma)(t))|_{t=t_\circ} = \nabla f(\gamma(t_\circ))\cdot\gamma'(t_\circ) = \nabla f(a)\cdot v$$

یعنی $\nabla f(a) \perp v$ و قضیهٔ لاگرانژ به اثبات می‌رسد.

قبل از ارائه مثال و تکمیل کردن صورت قضیهٔ لاگرانژ که بعداً خواهد آمد، دو بحث شهودی در تأیید قضیهٔ لاگرانژ بیان می‌کنیم:

(۱۶ــ۲)بحث شهودی ۱ محدود ساختن دامنه f به M و جستجو برای نقاط ماکسیمم و مینیمم آن را می‌توان به شکل یک آزمایش ذهنی بدین صورت مطرح کرد. موجوداتی را تصور می‌کنیم که چسبیده به M زندگی می‌کنند و از جهان خارج (یعنی $\mathbb{R}^n$) هیچ‌گونه ادراکی ندارند. برای این موجودات تابع f فقط روی M تعریف شده است. چون نقطهٔ a یک نقطهٔ غیربحرانی g است، M حول a از هموار بودن کافی برخوردار است و این موجودات ناحیهٔ حول a را به شکل $\mathbb{R}^{n-1}$ تجسم می‌کنند. اگر a یک نقطهٔ ماکسیمم یا مینیمم موضعی برای تحدید f به M باشد، برای این موجودات a یک نقطهٔ بحرانی f (محدود به جهان آنان) است و بنابراین باید "گرادیان f" (به مفهوم جهان M) از نظر این موجودات صفر شود. ولی "گرادیان f" از دیدگاه این موجودات با "گرادیان f" به مفهوم ما چه رابطه‌ای دارد؟ طبیعی به نظر می‌رسد که فرض کنیم گرادیان f برای موجودات محدود به M، "سایه" یا تصویر قائم گرادیان f عادی روی M است. در این صورت صفر شدن گرادیان برای این موجودات معادل با عمود بودن آن بر M از نظر ما است.

(۱۶ــ۳) بحث شهودی ۲ یک مورد خاص را در نظر می‌گیریم که وضعیت کلی را به طرزی بارز نشان می‌دهد. این مثال را می‌توان در هر بعد ارائه کرد ولی برای سهولت تجسم آن را در $\mathbb{R}^2$ یا $\mathbb{R}^3$ تصور کنید. شکل ۲ مربوط $\mathbb{R}^2$ است. فرض کنید هدف یافتن مینیمم (مجذور) فاصلهٔ نقطه $p = (p_1, \ldots, p_n)$ به مجموعهٔ تراز هموار $M = g^c$ است که p خارج آن قرار دارد. برای این کار بالنی کروی به مرکز p تجسم می‌کنیم که تدریجاً شعاع آن افزایش می‌یابد. اولین برخورد سطح این بالن

با M در نقطهٔ حداقل فاصله M از p صورت می‌گیرد. در این نقطه سطح بالن و M بر هم مماس می‌شوند پس قائم‌های این دو در یک راستا قرار می‌گیرند. جهت قائم بر M در نقطهٔ تماس a به وسیله $\bigtriangledown g(a)$ مشخص می‌شود. تابعی که یافتن مینیمم آن مطرح است، مجذور فاصله از p، یعنی $f(x) = \sum_{i=۱}^{n} (x_i - p_i)^۲$ می‌باشد که گرادیان آن $\bigtriangledown f(x) = ۲(x_۱ - p_۱, \ldots, x_n - p_n)$ در امتداد شعاع حامل از p به نقطهٔ x بر سطح بالن عمود است (در واقع سطح بالن در لحظات مختلف مجموعه‌های تراز گوناگون f است). بدین ترتیب همراستا بودن $\bigtriangledown f(a)$ و $\bigtriangledown g(a)$ توجیه می‌شود.

شکل ۲

اکنون مثال‌هایی از نحوهٔ به‌کار گرفتن قضیهٔ لاگرانژ در حل مسایل بهینه‌سازی ارائه می‌کنیم. در هر مسأله نقاط a را که در رابطهٔ $\bigtriangledown f(a) = \lambda \bigtriangledown g(a)$ صدق می‌کنند پیدا کرده و با مقایسهٔ مقدار f در این نقاط به جواب مسأله می‌رسیم. توجه کنید که اگر مسأله در $\mathbb{R}^n$ باشد، رابطهٔ $\bigtriangledown f(a) = \lambda \bigtriangledown g(a)$ در واقع n معادلهٔ $(n+۱)$ـ مجهولی به‌دست می‌دهد (λ نیز نامعلوم است) ولی رابطه $g(x) = c$ (مجموعهٔ ترازی که نقطهٔ مورد نظر روی آن قرار دارد) نیز برقرار است که با انضمام آن می‌توان امید داشت از $(n+۱)$ معادلهٔ $(n+۱)$ مجهولی به جواب برسیم.

<u>مثال ۱</u> نزدیکترین و دورترین نقاط بیضی‌وار $\frac{x^۲}{۴} + y^۲ + \frac{z^۲}{۲} = ۱$ را از نقطهٔ $(-۱, ۰, ۰)$ پیدا کنید. مجذور فاصله، یعنی $f(x,y,z) = (x+۱)^۲ + y^۲ + z^۲$ را در نظر می‌گیریم. هدف یافتن مینیمم و ماکسیمم این تابع برای (x,y,z) محدود به سطح بیضی‌وار است. اگر قرار دهیم $g(x,y,z) = \frac{x^۲}{۴} + y^۲ + \frac{z^۲}{۲}$، هدف یافتن ماکسیمم و مینیمم تحدید f به مجموعهٔ تراز $g(x,y,z) = ۱$ است. داریم $\bigtriangledown g(x,y,z) = (\frac{x}{۲}, ۲y, z)$ پس $\bigtriangledown g$ در هیچ نقطهٔ مجموعهٔ تراز $g(x,y,z) = ۱$ صفر نمی‌شود و روش لاگرانژ باید جواب دهد. رابطهٔ $\bigtriangledown f = \lambda \bigtriangledown g$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} ۲(x+۱) = \lambda(\frac{x}{۲}) \\ ۲y = \lambda(۲y) \\ ۲z = \lambda(z) \end{cases}$$

رابطه دوم نشان می‌دهد $y = ۰$ یا $\lambda = ۱$ که این دو حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

حالت $y=0$ از معادله سوم نتیجه می‌شود که $z=0$ یا $\lambda=2$. اگر $z=0$، علاوه بر $y=0$، داریم $x=\pm 2$ و دو نقطهٔ $(\pm 2,0,0)$ برای بررسی مطرح می‌شوند. اگر $\lambda=2$، معادلهٔ اول می‌دهد $x=2x+2$ یا $x=-2$ که در نتیجه $y=z=0$ و همان نقطهٔ $(-2,0,0)$ به‌دست می‌آید.

حالت $\lambda=1$ در این صورت معادله سوم نتیجه می‌دهد $z=0$ و معادله اول $\frac{x}{2}=2x+2$ منجر می‌شود به $x=-\frac{4}{3}$. چون $z=0$ داریم $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. در نتیجه دو نقطه $(-\frac{4}{3},\pm\frac{\sqrt{5}}{3},0)$ مطرح می‌گردند.

در مجموع به چهار نقطهٔ $(\pm 2,0,0)$ و $(-\frac{4}{3},\pm\frac{\sqrt{5}}{3},0)$ دست یافته‌ایم که با مقایسه مقدار f در این چهار نقطه باید جواب مورد نظر به‌دست آید:

$$f(2,0,0)=9 \quad , \quad f(-2,0,0)=1 \quad , \quad f(-\frac{4}{3},\pm\frac{\sqrt{5}}{3},0)=\frac{2}{3}$$

نتیجه این که $(2,0,0)$ دورترین نقطهٔ بیضی‌وار، و $(-\frac{4}{3},\pm\frac{\sqrt{5}}{3},0)$ نزدیکترین نقطه‌های بیضی‌وار به نقطهٔ $(-1,0,0)$ هستند.

مثال ۲ فرض کنید $K,A,B,C,D,\alpha,\beta,\gamma$ داده‌های ثابت مثبت هستند. می‌خواهیم ماکسیمم تابع $f(x,y,z)=Kx^\alpha y^\beta z^\gamma$ را مشروط به این که $Ax+By+Cz=D$، $x\geq 0$، $y\geq 0$ و $z\geq 0$ بررسی کنیم. این نوع بهینه‌سازی در بعضی مسایل اقتصادی مطرح می‌شود. در این تعبیر x، y و z عوامل تولید هستند (مثلاً نیروی کار، ماده اولیه و سرمایه‌گذاری در ماشین آلات) و A، B و C هزینهٔ واحد این عوامل. D مقدار ثابتی است که مجموع هزینه‌گذاری را نمایش می‌دهد. f تابع تولید برحسب عوامل x,y,z است. هدف، انتخاب نسبت مناسب از x، y و z با قید $Ax+By+Cz=D$ است به نحوی که میزان تولید حداکثر ممکن باشد. از نظر هندسی باید ماکسیمم تابع $f(x,y,z)=Kx^\alpha y^\beta z^\gamma$ روی مثلث واقع بر صفحهٔ $Ax+By+Cz=D$ محصور در ثمن اول $(x\geq 0، y\geq 0، z\geq 0)$ بررسی شود. توجه کنید که روی اضلاع مثلث، یکی از سه متغیر x، y یا z صفر می‌شود و در نتیجه مقدار f صفر می‌شود، بنابراین جواب باید یک نقطهٔ درونی مثلث باشد.

شکل ۳

ضمناً با نوشتن $g(x,y,z)=Ax+By+Cz$ می‌بینیم که $\bigtriangledown g(x,y,z)=(A,B,C)$ همه‌جا ناصفر است و روش لاگرانژ باید جواب مورد نظر را به‌دست دهد. رابطه $\bigtriangledown f=\lambda\bigtriangledown g$ به صورت مؤلفه به مؤلفه هست:

$$\begin{cases} \alpha K x^{\alpha-۱}y^{\beta}z^{\gamma}=\lambda A \\ \beta K x^{\alpha}y^{\beta-۱}z^{\gamma}=\lambda B \\ \gamma K x^{\alpha}y^{\beta}z^{\gamma-۱}=\lambda C \end{cases}$$

چون برای جواب مطلوب $x\neq ۰$، $y\neq ۰$ و $z\neq ۰$، می‌توانیم سه رابطه را به ترتیب در x، y، و z ضرب کرده نتیجه بگیریم:

$$\begin{cases} \alpha f(x,y,z)=\lambda Ax \\ \beta f(x,y,z)=\lambda By \\ \gamma f(x,y,z)=\lambda Cz \end{cases}$$

بنابراین

$$\frac{A}{\alpha}x=\frac{B}{\beta}y=\frac{C}{\gamma}z$$

که با جایگزین در $Ax+By+Cz=D$ به جواب منحصر به فردی می‌رسد. همان طور که بحث شد این جواب یکتا باید ماکسیمم باشد. رابطهٔ بالا نشان می‌دهد سهم مناسب x، y و z با ماکسیمم کردن تابع تولید نسبت $(x:y:z)=(\frac{\alpha}{A}:\frac{\beta}{B}:\frac{\gamma}{C})$ است.

بالاخره مثال سادهٔ زیر نشان می‌دهد که رعایت بررسی جداگانهٔ نقاط احتمالاً ناهموار، یعنی نقاطی که در آن $\bigtriangledown g$ صفر می‌شود کاملاً ضروری است.

<u>مثال ۳</u> نزدیکترین نقطهٔ خم $y^۲-x^۳=۰$ به نقطهٔ $(-۱,۰)$ را پیدا کنید.

مجذور فاصلهٔ $(-۱,۰)$ از نقطهٔ (x,y) هست $f(x,y)=(x+۱)^۲+y^۲$. برای $g(x,y)=y^۲-x^۳$، رابطهٔ $\bigtriangledown f=\lambda\bigtriangledown g$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} ۲(x+۱)=\lambda(-۳x^۲) \\ ۲y=\lambda(۲y) \end{cases}$$

جواب بدیهی مسأله، نقطه $(0,0)$ است که در رابطهٔ اول بالا صدق نمی‌کند. توجه کنید که $\triangledown g(0,0) = \underline{0}$ و خم $y^2 - x^3 = 0$ در $(0,0)$ هموار نیست.

شکل ۴