قضیهٔ تابع وارون، تعویض مختصات

فرض کنید روابط زیر داده شده‌اند که در آن هر f_i تابعی دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته است:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ y_n = f_n(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{۱}$$

در اینجا n کمیت $y_1, \ldots, y_n$ برحسب کمیت‌های $x_1, \ldots, x_n$ داده شده‌اند. سؤالی طبیعی که تکراراً در ریاضیات و کاربردهای آن مطرح می‌شود این است که در چه شرایطی می‌توان از کمیت‌های $y_1, \ldots, y_n$ به جای $x_1, \ldots, x_n$ به عنوان متغیرهای مسأله خاصی که برحسب $x_1, \ldots, x_n$ بیان شده است استفاده کرد. در واقع می‌توان این سؤال را به عنوان "تعویض متغیر" یا "تعویض مختصات" مطرح کرد. از سویی دیگر می‌توان (۱) را بیان یک تابع $f = (f_1, \ldots, f_n)$ از دامنهٔ مشترک f_i ها در $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}^n$، فرض کرد. تابع وارون یا تابع معکوس f، تابعی g با این ویژگی است که هرگاه $y = f(x)$، آنگاه $x = g(y)$، و بالعکس (شکل ۱). بدین ترتیب f و g تناظری یک به یک میان دو زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ برقرار می‌کنند و می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{۲}$$

شکل ۱

اگر $g_1, \ldots, g_n$ تابع‌های دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته باشند، جایگزینی $y_1, \ldots, y_n$ به جای $x_1, \ldots, x_n$ را توسط (۲) تعویض مختصات مجاز از x به y می‌نامیم. بدین ترتیب اگر

$Z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ یک تابع مشتق‌پذیر از $x_1, \ldots, x_n$ باشد، می‌توان نوشت $Z = \varphi(g(x_1, \ldots, x_n))$ و بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای، $\varphi \circ g$ کمیت Z را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از $y_1, \ldots, y_n$ بیان می‌کند.

در مورد تابع‌های یک متغیری، $n = 1$، دیده‌ایم که شرطی لازم و کافی برای وجود وارون برای تابعی $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$، I یک بازهٔ باز در $\mathbb{R}$، این است که f یکنوا (صعودی یا نزولی) باشد. در این وضعیت، اگر f مشتق‌پذیر با مشتق همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، تابع وارون، g، نیز مشتق‌پذیر خواهد شد و از رابطهٔ $g(f(x)) = x$ بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای نتیجه می‌گیریم که:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{اگر } y = f(x) \tag{3}$$

البته شرط صعودی یا نزولی بودن یک تابع در سراسر دامنه به ندرت حاصل می‌شود. از این رو معمولاً به مفهوم "وارون موضعی" متوسل می‌شویم که به صورت زیر است. دامنهٔ تابع داده شدهٔ f را به بازه‌ای کوچکتر محدود می‌کنیم به طوری که در این بازه f صعودی یا نزولی باشد. در این صورت برای تحدید تابع به این زیربازه وارونی وجود خواهد داشت که یک وارون موضعی f خوانده می‌شود. در این صورت تحدید f به یک زیربازهٔ باز از دامنه اولیه، این بازه را به طور یک به یک به یک بازهٔ باز می‌نگارد.

مثالی باز تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x) = \sin x$ است. چنانچه دامنهٔ f را بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ محدود کنیم، f در این بازه صعودی است و وارون آن معمولاً به $\sin^{-1}$ یا Arcsin نمایش داده می‌شود. بدین ترتیب $\sin^{-1}(y)$، برای $-1 \le y \le 1$، یگانه x در بازهٔ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ است که $\sin x = y$. اگر به جای بازهٔ بسته $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$، از بازهٔ باز $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ استفاده کنیم، مشتق f در این بازه اکیداً مثبت است، پس $\sin^{-1}$ در تصویر این بازه، یعنی $]-1, 1[$ مشتق‌پذیر است و

$$\begin{aligned}(\sin^{-1})'(y) &= \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\end{aligned}$$

(فقط جذر مثبت $\cos^2 x = (1 - \sin^2 x)$ در نظر گرفته شده است زیرا که $\cos x$ برای $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ مثبت است).

هدف ما اکنون این است که موضوع "وارون موضعی" را به توابع چند متغیری تعمیم دهیم. قضیهٔ زیر تعمیم مورد نظر است:

(۲۹—۱) قضیهٔ تابع وارون دستگاه (۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید هر f_i دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته است. فرض کنید نقطهٔ $a = (a_1, \ldots, a_n)$ یک نقطهٔ درونی دامنه $f = (f_1, \ldots, f_n)$ باشد که در آن $\det(Df(a)) \neq 0$. در این صورت زیرمجموعهٔ بازی U از دامنهٔ f حول a وجود دارد که $V = f(U)$ یک مجموعهٔ باز است و تحدید f به U تناظری یک به یک میان U و V ایجاد می کند. به علاوه اگر $g: U \longrightarrow V$ وارون موضعی f باشد، g دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته است.

این قضیه را می‌توان به‌صورت حالت خاصی از قضیهٔ تابع ضمنی به صورت زیر نتیجه گرفت، ولی شایان ذکر است که معمولاً نخست این قضیه به اثبات می‌رسد و سپس می‌توان قضیهٔ تابع ضمنی را از این قضیه نتیجه گرفت. برای اثبات، (۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} -y_1 + f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ -y_n + f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \tag{۴}$$

و قرار می‌دهیم $b = (b_1, \ldots, b_n) = f(a)$. نقطه $(y, x) = (b, a)$ در (۴) صدق می‌کند. اگر به جای $-y_i + f_i(x_1, \ldots, x_n)$ بنویسیم $F_i(y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_n)$، نتیجه می‌شود که دترمینان ماتریس $[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(b, a)]$ ناصفر است. پس بنابر قضیهٔ تابع ضمنی می‌توان برای (y, x) های نزدیک (b, a) که در (۴) صدق می‌کنند، x را به صورت تابعی از y استخراج کرد، $x = g(y)$، یا

$$\begin{cases} x_1 = g_1(y_1, \ldots, y_n) \\ \vdots \\ x_n = g_n(y_1, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{۵}$$

که در آن g_i ها تابع‌های دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته هستند. بدین ترتیب یک وارون موضعی برای f حول a به‌دست می آید.

مضافاً توجه کنید که با مشتق‌گیری از ترکیب $g(f(x)) = x$ و $f(g(y)) = y$ روابطی مشابه (۳)

به‌دست می‌آیند:

$$Dg(y) \cdot Df(x) = I \quad , \quad Df(x) \cdot Dg(y) = I \tag{٦}$$

که در اینجا ماتریس واحد $n \times n$، یعنی $\begin{bmatrix} ١ & & ٠ \\ & \ddots & \\ ٠ & & ١ \end{bmatrix}$ است. پس ماتریس مشتق‌های پاره‌ای y_i ها نسبت به x_j ها، وارون ماتریس مشتق‌های پاره‌ای x_i ها نسبت به y_j هاست:

$$[\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(y)] = [\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)]^{-١} \tag{٧}$$

در زیر چند نوع تعویض مختصات معروف را در این چارچوب بررسی می‌کنیم.

<u>مثال ١</u> (مختصات قطبی (x, y)) می‌نویسیم

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{٨}$$

داریم

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

پس $\det(\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}) = r$. طبق قضیهٔ تابع وارون اگر $(r_٠, \theta_٠)$ طوری باشد که $r_٠ \neq ٠$، آنگاه (٨) یک تعویض مختصات مجاز از یک مجموعهٔ باز U حول $(r_٠, \theta_٠)$ به مجموعهٔ بازی V حول $(x_٠, y_٠) = (r_٠\cos\theta_٠, r_٠\sin\theta_٠)$ ایجاد می‌کند ولی می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} r = g_١(x,y) \\ \theta = g_٢(x,y) \end{cases} \quad \text{برای } (r,\theta) \in U \text{ و } (x,y) \in V \tag{٩}$$

در مورد بزرگی اندازهٔ U و V توجه کنید که نباید $r = ٠$ را شامل شود زیرا که به‌ازای $r = ٠$ یک به یک بودن تابع تعریف شده در (٨) نقض می‌شود. همچنین U نباید شامل دو نقطهٔ $(r, \theta_١)$ و $(r, \theta_٢)$ باشد که $\theta_٢ - \theta_١$ مضرب صحیحی از ٢π است زیرا که مجدداً یک به یک بودن (٨) نقض خواهد شد.

شکل ٢

<u>مثال ۲</u> (مختصات استوانه‌ای در $\mathbb{R}^۳$) این در واقع جایگزینی (x,y) در مختصات دکارتی فضای سه‌بعدی (x,y,z) با مختصات قطبی است، یعنی

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (۱۰)$$

سه‌تایی (r,θ,z) را <u>مختصات استوانه‌ای</u> نقطهٔ (x,y,z) می‌نامیم. داریم

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & r\cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

و $\det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$. در اینجا ملاحضاتی مشابه مثال ۱ برقرار است.

<u>مثال ۳</u> (مختصات کروی) برای نقطهٔ (x,y,z) در $\mathbb{R}^۳$، ρ را برابر فاصلهٔ نقطه از $\underline{o}$، θ را به مفهوم مختصات قطبی، و φ را زاویهٔ از نیمهٔ بالای محور z به نیمخط واصل از $\underline{o}$ به (x,y,z) می‌گیریم.

شکل ۳

بدین ترتیب:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad (۱۱)$$

و داریم:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \begin{bmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & ۰ \end{bmatrix}$$

و محاسبه دترمینان این ماتریس نشان می‌دهد که $\det = \rho^۲\sin\varphi$. این دترمینان دقیقاً در نقاط خارج از محور z ناصفر است، پس حول این نقاط می‌توان یک تعویض مختصات موضعی مجاز به مختصات کروی انجام داد. در واقع اگر محدودیت‌های $۰ \le \varphi \le \pi$، $۰ \le \theta \le ۲\pi$ و $\rho > ۰$ را اعمال کنیم، دستگاه (۱۱) یک تابع یک به یک از (ρ,φ,θ) به (x,y,z) تعریف می‌کند. اگر مشتق‌پذیری تابع وارون مطرح نباشد می‌توان از این تعویض مختصات خارج از $\underline{o}$ استفاده کرد.