توابع ضمنی

در حساب دیفرانسیل یک متغیری به مطلب زیر برخورده‌اید. رابطه‌ای $F(x,y)=0$ داده شده است. اگر فرض کنیم بتوان از این رابطه y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x در نظر گرفت، $y=f(x)$، می‌خواهیم مشتق این تابع، یعنی $f'(x)=\frac{dy}{dx}$، را محاسبه کنیم. اینکه بتوان y را به عنوان تابعی از x از $F(x,y)=0$ استخراج کرد نتیجه می‌دهد که $F(x,f(x))$ به‌ازای همه مقادیر x صفر است. بنابراین مشتق عبارت $F(x,f(x))$ نسبت به x همواره صفر خواهد بود. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای دو متغیری داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(F(x,f(x))=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \\ &\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

حال اگر در نقطهٔ (x,y) داشته باشیم $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\neq 0$، می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \qquad (2)$$

روش فوق گاهی زیرعنوان "مشتق‌گیری ضمنی" مطرح می‌شود. این روش اغلب بر حل رابطهٔ $F(x,y)=0$ برای y بر حسب x و سپس مشتق گرفتن، ارجحیت دارد. دلایل عمدهٔ برتری ادعا شده به این شرح است:

الف) ممکن است استخراج صریح y بر حسب x ناممکن یا دشوار باشد ولی مشتق را بتوان از (۲) به سادگی محاسبه کرد.

ب) اگر در نقطه‌ای (x,y) داشته باشیم $\frac{\partial F}{\partial y}=0$ و $\frac{\partial F}{\partial x}\neq 0$، این امر می‌تواند دلیل بر این باشد که مماس بر خم تعریف شده به وسیله $F(x,y)=0$ قائم باشد. در این صورت باید بتوان x را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از y حول (x,y) فوق نوشت.

ج) مهمترین دلیل این است که رابطهٔ $F(x,y)=0$ عموماً y را به عنوان تابعی از x تعریف نمی‌کند. مجموعه نقاط (x,y) که در $F(x,y)=0$ صدق می‌کنند ممکن است مثلاً خمی مانند شکل ۱ باشد.

شکل ۱

در اینجا از شکل چنین بر می‌آید که در نقاط P، Q و S مماس بر خم قائم است و در نقطهٔ R، نه y تابعی مشتق‌پذیر از x است و نه x تابعی مشتق‌پذیر از y. اگر نقاط P، Q، R و S را حذف کنیم، ظاهراً می‌توان پنج تابع به شکل $y=f(x)$ از رابطهٔ فوق استخراج کرد. حتی اگر بتوان عبارت این تابع‌ها را صریحاً به‌دست آورد، مشتق‌گیری جداگانه از آنها دشوارتر از این است که از $F(x,y)=0$ یک بار به طور ضمنی مشتق‌گیری شود. مشتق‌گیری ضمنی این ویژگی را نیز دارد که نقاط P، Q و S را که در آنها مماس قائم وجود دارد بدون تبعیض نمایان می‌کند. حتی در مورد عبارت سادهٔ $x^2+y^2=R^2$، دایره شعاع R حول $(0,0)$، از مشتق‌گیری ضمنی $x+y\frac{dy}{dx}=0$، یا $x\frac{dx}{dy}+y=0$ می‌توان ضریب زاویهٔ خط مماس در هر نقطهٔ دایره را به سادگی محاسبه کرد، و این روش طبیعی‌تر از استخراج دو تابع $y=\pm\sqrt{R^2-x^2}$ و کارکردن با آنهاست که به هر حال دو نقطهٔ $(\pm R,0)$ را پوشش نمی‌دهند.

فرمول مشابه (۲) را می‌توان برای مشتق‌گیری ضمنی از یک عبارت با تعداد متغیر بیشتر نیز به‌دست آورد. فرض کنید $F(x_1,\dots,x_n,y)=0$. اگر فرض کنیم از این عبارت، y به صورت تابعی مشتق‌پذیر از $x_1,\dots,x_n$ استخراج شدنی است، $y=f(x_1,\dots,x_n)$، آنگاه $F(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n))$ به‌ازای همهٔ مقادیر $(x_1,\dots,x_n)$ صفر است و اگر نسبت به x_j مشتق بگیریم حاصل صفر خواهد شد.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(x_1,\dots,x_n,f(x_1,\dots,x_n)))=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_j}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_j}=0$$

بنابراین وقتی $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$، داریم:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \tag{۳}$$

که مشابه (۲) است. توجه کنید که در (۲) و (۳)، علاوه بر این فرض که $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$، به طورضمنی این نیز فرض شده است که واقعاً می‌توان y را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از x، یا $(x_1, \dots, x_n)$، نوشت. موضوع اصلی بخش حاضر بررسی شرایط صحت این فرض و بحث پیرامون نتایج آن است. در واقع به جای یک رابطه $F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$، حالت کلی یک مجموعه رابطه را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید m رابطه زیر میان $(m+n)$ متغیر $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$ داده شده‌اند:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \tag{۴}$$

که در آن هر F_i دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته نسبت به کلیهٔ متغیرهای $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ است. با توجه به تعداد روابط، m، انتظار می‌رود که معمولاً بتوان m متغیر$y_1, \dots, y_m$ را برحسب متغیرهای باقیمانده، $x_1, \dots, x_n$، به صورت تابع‌هایی $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$، ...، $y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$، استخراج کرد. البته این انتظار بعضی اوقات برآورده نمی‌شود. مثلاً در شکل ۱ دیدیم که پنج تابع مختلف $y = f(x)$ از رابطهٔ داده شده استخراج می‌شود، یا از رابطهٔ $x^2 + y^2 + 1 = 0$ هیچ تابعی نمی‌توان استخراج کرد چون چون هیچ نقطهٔ (x, y) در این رابطه صدق نمی‌کند. به همین ترتیب اگر دستگاه دو معادلهٔ سه مجهولی زیر را در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

این دستگاه جواب ندارد (چرا؟). موضوعی که در اینجا بررسی خواهیم کرد به شرح زیر است. فرض می‌کنیم (۴) دارای دست کم یک جواب باشد، یعنی نقطه‌ای $(x_1, \dots, x_n) = x = a = (a_1, \dots, a_n)$ و $(y_1, \dots, y_m) = y = b = (b_1, \dots, b_n)$ وجود داشته باشند که در (۴) صدق کنند. در این صورت "قضیه تابع ضمنی" که در زیر خواهد آمد، شرطی کافی ارائه می‌کند برای این که بخشی (احتمالاً

کوچک) از مجموعهٔ جواب (۴) که حول (a,b) قرار دارد به شکل نمودار تابعی مشتق‌پذیر $y=f(x)$ باشد. چون نمودار یک تابع مشتق‌پذیر را معمولاً "هموار" تعبیر می‌کنیم، به این مفهوم، و تحت شرط کافی که ارائه خواهد شد، مجموعهٔ جواب در نزدیکی (a,b) "هموار" تلقی می‌شود.

(۲۸–۱) قضیهٔ تابع ضمنی **فرض می‌کنیم F_i ها در (۴) دارای مشتق‌های پاره‌ای پیوسته نسبت به متغیرهای x و y هستند، نقطهٔ $(x,y)=(a,b)$ در (۴) صدق می‌کند و:**

$$\det[\frac{\partial F_i}{\partial y_i}(a,b)] \neq ۰ \qquad (۵)$$

در این صورت $r_۱ > ۰$ و $r_۲ > ۰$ وجود دارند و تابعی مشتق‌پذیر f از گوی باز شعاع $r_۱$ حول a به گوی باز شعاع $r_۲$ حول b، به طوری که نمودار تابع f دقیقاً برابر مجموعه نقاط (x,y) واجد شرط‌های $|x| < r_۱$ و $|y| < r_۲$ است که در (۴) صدق می‌کنند.

در حالت $m=n=۱$، شرط (۵)به این یعنی است که $\frac{\partial F}{\partial y}(a,b) \neq ۰$ و شکل ۲ حکم قضیه را نمایش می‌دهد. توجه کنید که فقط بخش کوچکی از مجموعهٔ جواب که حول (a,b) قرار دارد به صورت نمودار یک تابع مشتق‌پذیر $y=f(x)$ ظاهر می‌شود.

شکل ۲

اثبات قضیهٔ تابع ضمنی در این درس ارائه نخواهد شد ولی از صورت آن استفاده فراوان خواهد شد. در زیر به بحث پیرامون بعضی کاربردها و حواشی قضیه خواهیم پرداخت.

(۲۸–۲–۱) شرط (۵) یک شرط کافی بسیار قابل استفاده است. بدون آن نیز گاهی حکم قضیه برقرار می‌شود. مثلاً اگر رابطهٔ $y^۳ - x^۴ = ۰$ را در نظر بگیریم، برای $F(x,y)=y^۳-x^۴$ داریم $\frac{\partial F}{\partial y}(۰,۰)=۰$، ولی مجموعه جواب برابر نمودار تابع مشتق‌پذیر $y=x^{\frac{۴}{۳}}$ است. با این حال برای درک اهمیت (۵) لازم است با بعضی مشکلاتی که ممکن است در صورت عدم برقراری آن رخ دهد آشنا شویم. برای $m=n=۱$ سه مثال در نظر می‌گیریم. در ابعاد بالا تنوع مشکلات گسترده‌تر است. برای هر یک از سه تابع $F,G,H:\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ که به صورت

$$F(x,y)=x^۲+y^۲ \quad , \quad G(x,y)=x+y^۲ \quad , \quad H(x,y)=x+y^۳$$

تعریف شده‌اند، مجموعهٔ جواب، به ترتیب $F(x,y)=0$، $G(x,y)=0$ و $H(x,y)=0$ در شکل‌های ۳الف، ۳ب و ۳ج نمایش داده شده‌اند. در هر مورد نقطه $(a,b)=(0,0)$ در رابطه صدق می‌کند. در (الف) $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)=0$ و مجموعهٔ جواب $F(x,y)=0$ از یک تک نقطه‌ای، $(0,0)$، تشکیل شده است. طبعاً این تک نقطه نمودار تابعی نیست که روی یک گوی باز حول $a=0$ تعریف شده باشد. در اینجا انتظار متعارف ما که مجموعهٔ جواب یک خم (یک بعدی) باشد برآورده نمی‌شود. در (ب)، $\frac{\partial G}{\partial y}(0,0)=0$. مجموعهٔ جواب نمی‌تواند نمودار یک تابع تعریف شده در مجموعهٔ بازی حول $a=0$ باشد. در (ج)، $\frac{\partial H}{\partial y}(0,0)=0$. مجموعهٔ جواب در این مورد نمودار یک تابع از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است، ولیکن این تابع در $a=0$ مشتق‌پذیر نیست (مماس قائم).

(۲۸—۲—۲) <u>هموار بودن مجموعهٔ تراز.</u> فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، $F:S\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی مشتق‌پذیر با مشتق‌های پاره‌ای پیوسته و a یک نقطهٔ درونی S. قبلاً اشاره کرده‌ایم که اگر $\nabla F(a)\neq\underline{0}$، آنگاه مجموعهٔ تراز گذرا از a به مفهومی "هموار" است. این مطلب را می‌توانیم اکنون به طور دقیق توضیح دهیم. $\nabla F(a)=(\frac{\partial F}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}(a))\neq\underline{0}$ بدین معنی است که دست کم یکی از مشتق‌های پاره‌ای F در نقطهٔ a صفر نیست. مثلاً فرض کنید $\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\neq\underline{0}$. اگر $F(a)=c$، یعنی a روی مجموعهٔ تراز منسوب به c قرار داشته باشد، تابع $G:S\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $G(x)=F(x)-c$ تعریف می‌کنیم. مجموعه تراز فوق‌الذکر به مجموعهٔ منسوب به 0 برای G تبدیل می‌شود. برای این مجموعهٔ تراز داریم $G(x_1,\dots,x_n)=0$، نقطه a در این رابطه صدق می‌کند و $\frac{\partial G}{\partial x_n}(a)=\frac{\partial F}{\partial x_n}(a)\neq 0$. پس طبق قضیهٔ تابع ضمنی، تابعی مشتق‌پذیر f تعریف شده از یک گوی باز حول $(a_1,\dots,a_{n-1})$ به بازهٔ بازی حول a_n در $\mathbb{R}$ وجود دارد که نمودار آن برابر بخشی از مجموعهٔ تراز است که حول a قرار دارد. به این مفهوم مجموعه تراز حول a هموار است.

برای بهره‌گیری کاملتر از قضیهٔ تابع ضمنی، لازم است همانند فرمول‌های (۲) و (۳)، فرمولی در حالت کلی برای مشتق تابع مشتق‌پذیر f که وجود آن به وسیلهٔ قضیهٔ تابع ضمنی تضمین می‌شود به‌دست آوریم. برای $y=f(x)$، ماتریس مشتق، $[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a)]$ یک ماتریس $m\times n$ است، ماتریس مشتق‌های پاره‌ای F_i ها نسبت به $(x_1,\dots,x_n)$، $[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)]$ نیز یک ماتریس $m\times n$، و ماتریس

مشتق‌های پاره‌ای f_i ها نسبت به $(y_۱, \ldots, y_m)$ یک ماتریس مربعی $m \times m$ می‌باشد. ضمناً شرط $\det[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a,b)] \neq ۰$ تضمین می‌کند که وارون ماتریس $[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)]$ وجود دارد.

(۳–۲۸) <u>متمم قضیهٔ تابع ضمنی</u> **در شرایط قضیهٔ تابع ضمنی، اگر (x,y) به اندازه کافی به (a,b) نزدیک باشد، داریم:**

$$[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x)] = -[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)]^{-۱}[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(x,y)] \qquad (۶)$$

توجه کنید که چون مشتق‌های پاره‌ای پیوسته فرض شده‌اند و دترمینان تابعی پیوسته از درایه‌هاست (برحسب ضرب و جمع تعریف شده است)، صفر نبودن دترمینان $[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)]$ به‌ازای $(x,y) = (a,b)$ موجب می‌شود که این دترمینان در نزدیکی (a,b) نیز ناصفر باشد، پس وارون ماتریس $[\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(x,y)]$ برای (x,y) به اندازهٔ کافی نزدیک به (a,b) وجود خواهد داشت. توجه کنید که در حالت $m = ۱$، (۶) به (۳) تبدیل می‌شود و در حالت خاص‌تر $m = ۱$ و $n = ۱$، این همان رابطهٔ (۲) است.

اثبات (۶) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای سر راست است. برای x در دامنهٔ تابع f ذکر شده در قضیهٔ تابع ضمنی، $F(x,f(x))$ همواره ثابت صفر است، پس

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F(x,f(x))) = \underline{۰}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_j}(F_۱(x,f(x))) \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_j}(F_m(x,f(x))) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ \vdots \\ ۰ \end{bmatrix}$$

مشتق‌گیری طرف چپ را به کمک قاعدهٔ زنجیره‌ای انجام می‌دهیم:

$$\begin{cases} \sum_{k=۱}^{n} \frac{\partial F_۱}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{l=۱}^{m} \frac{\partial F_۱}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = ۰ \\ \vdots \\ \sum_{k=۱}^{n} \frac{\partial F_m}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j} + \sum_{l=۱}^{m} \frac{\partial F_m}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial x_j} = ۰ \end{cases}$$

یا

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

با انتقال ستون سمت چپ به طرف راست و ضرب کردن در وارون ماتریس $m \times m$ داریم

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_j} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \end{bmatrix}$$

حال اگر برای $j = 1, \ldots, m$ این ستون‌ها را کنار هم قرار دهیم، فرمول (۶) نتیجه می‌شود.

مثال ۱. روابط زیر داده شده‌اند:

$$\begin{cases} x^3y + 2y^2z^2 - xz^3 = 0 \\ e^{y+z} - x = 0 \end{cases}$$

نقطهٔ $(x, y, z) = (1, 0, 0)$ در این روابط صدق می‌کند. انتظار عادی این است که هر یک از دو معادلهٔ فوق یک رویه (سطح خمیده) در $\mathbb{R}^3$ تعریف کند و اشتراک این دو رویه یک خم باشد. می‌دانیم $(1, 0, 0)$ در این اشتراک قرار دارد. آیا می‌توان برای بخشی از این اشتراک که در نزدیکی $(1, 0, 0)$ قرار دارد، دو متغیر را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از متغیر سوم نوشت؟ در صورت جواب مثبت، می‌خواهیم مشتق دو متغیر را نسبت به متغیر سوم در نقطهٔ $(1, 0, 0)$ محاسبه کنیم. این مسأله ظاهراً در چارچوب قضیهٔ تابع ضمنی با $m = 2$ و $n = 1$ قرار می‌گیرد ولی مشخص نیست کدام دو از متغیرهای x، y و z می‌توانند نقش متغیرهای y_i را در قضیه ایفاء کنند. به منظور یافتن متغیرهای مناسب، ماتریس مشتق‌های عبارت‌های بالا را نسبت به متغیرهای x، y و z تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} 3x^2y - z^3 & x^3 + 4yz^2 & 4y^2z - 3xz^2 \\ -1 & e^{y+z} & e^{y+z} \end{bmatrix}_{(1,0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(ستون‌های اول تا سوم، به ترتیب، مشتق نسبت به x، y و z را نمایش می‌دهند.) برای اینکه از قضیهٔ تابع ضمنی استفاده کنیم باید دو متغیر را طوری انتخاب کنیم که ماتریس 2×2 متشکل از ستون‌های مربوط به آن دو متغیر دارای دترمینان ناصفر باشد. اگر $x^3y + 2y^2z^2 - xz^3$ را به $F_1(x, y, z)$ و

$e^{y+z} - x$ را به $F_۲(x,y,z)$ نمایش دهیم، داریم

$$\det \frac{\partial(F_۱,F_۲)}{\partial(x,y)} = \det \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = ۱$$

$$\det \frac{\partial(F_۱,F_۲)}{\partial(x,z)} = \det \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix} = ۰$$

$$\det \frac{\partial(F_۱,F_۲)}{\partial(y,z)} = \det \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} = ۱$$

بدین ترتیب، طبق قضیهٔ تابع ضمنی، می‌توان حول $(۰,۰,۱)$، (x,y) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از z، و نیز (y,z) را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x در نظر گرفت، ولی قضیهٔ تابع ضمنی تضمین نمی‌کند که بتوان (x,z) را به صورت تابعی مشتق‌پذیر از y نمایش داد (خواهیم دید که در واقع نمی‌توان حول $(۰,۰,۱)$، (x,z) را تابعی مشتق‌پذیر از y پنداشت). برای محاسبهٔ مشتق، فرض کنید (x,y) را تابعی مشتق‌پذیر از z در نظر گرفته‌ایم. طبق متمم قضیهٔ تابع ضمنی داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_۱}{\partial x} & \frac{\partial F_۱}{\partial y} \\ \frac{\partial F_۲}{\partial x} & \frac{\partial F_۲}{\partial y} \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} \frac{\partial F_۱}{\partial z} \\ \frac{\partial F_۲}{\partial z} \end{bmatrix}$$

و در نقطهٔ $(۰,۰,۱)$:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dz} \\ \frac{dy}{dz} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}^{-۱} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dz} = ۱ \quad , \quad \frac{dy}{dz} = ۰$$

محاسبهٔ مشتق‌های فوق را می‌توان بدون استفاده از متمم قضیهٔ تابع ضمنی انجام داد به این شرط که متغیرهای مناسب را اختیار کرده باشیم. به عنوان مثال، به فرض اینکه بدانیم می‌توان (x,y) را تابعی مشتق‌پذیر از z در نظر گرفت (حول $(۰,۰,۱)$)، $(x,y) = f(z)$، روابط $F_۱(f(z),z) = ۰$ و $F_۲(f(z),z) = ۰$ برای z در نزدیکی $z = ۰$ برقرار است، پس مشتق عبارت‌های طرف چپ نسبت به z

صفر خواهد بود. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dz}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dz}+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dz}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x^2y-z^3)\frac{dx}{dz}+(x^3+4yz^2)\frac{dy}{dz}+(4y^2z-3xz^2)=0 \\ -\frac{dx}{dz}+e^{y+z}\frac{dy}{dz}+e^{y+z}=0 \end{cases}$$

در نقطهٔ $(1,0,0)$ داریم

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dz}=0 \\[2ex] -\dfrac{dx}{dz}+\dfrac{dy}{dz}+1=0 \end{cases}$$

که مجدداً نتیجه می‌دهد $\frac{dy}{dz}=0$ و $\frac{dx}{dz}=1$.

اگر فرض می‌کردیم (x,z) را می‌توان به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از y حول $(1,0,0)$ در نظر گرفت و محاسبهٔ مشابهی انجام می‌دادیم حاصل می‌شد:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dy}+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dy}=0 \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dy}+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dy}=0 \end{cases}$$

و در نقطهٔ $(1,0,0)$:

$$\begin{cases} 1=0 \\[2ex] -\dfrac{dx}{dy}+1+\dfrac{dz}{dy}=0 \end{cases}$$

این نتیجهٔ متناقض گویای این واقعیت است که نمی‌توان (x,z) را تابعی مشتق‌پذیر از y حول $(1,0,0)$ انگاشت. در واقع با توجه به محاسبهٔ پیشین که نتیجه داد $\frac{dy}{dz}=0$، اگر مجموعه جواب حول $(1,0,0)$ را روی صفحه (y,z) تصویر کنیم، خمی مشاهده خواهد شد که مماس بر آن محور z مماس است. بدین ترتیب اگر (x,z) به صورت تابعی از y نوشته شود، مشتق z نسبت به y تعریف شدنی نیست.

مثال ۲. در ترمودینامیک از رابطه معروف $PV-kT=0$ (P: فشار، V: حجم، T: دمای کلوین)

رابطهٔ زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -۱ \qquad (۷)$$

مقصود از $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ این است که از رابطه $PV - kT = ۰$، P به عنوان تابعی از (V, T) در نظر گرفته شده و سپس مشتق آن نسبت به V با ثابت نگاهداشتن T محاسبه شده است، به همین ترتیب در مورد دو عبارت دیگر. صحت (۷) به رابطهٔ خاص $PV - kT = ۰$ وابسته نیست، بلکه هرگاه $F(x, y, z) = ۰$ داده شده باشد که در آن مشتق‌های پاره‌ای F نسبت به سه متغیر وجود داشته و پیوسته باشند، در هر نقطهٔ (x, y, z) که سه مشتق پاره‌ای $\frac{\partial F}{\partial x}$، $\frac{\partial F}{\partial y}$ و $\frac{\partial F}{\partial z}$ ناصفر باشند، می‌توان نوشت:

$$(\frac{\partial x}{\partial y})_z(\frac{\partial y}{\partial z})_x(\frac{\partial z}{\partial x})_y = -۱ \qquad (۸)$$

این رابطه را نیز می‌توان به n متغیر تعمیم داد. فرض کنید $F(x_۱, \ldots, x_n) = ۰$، مشتق‌های پاره‌ای F نسبت به $x_۱, \ldots, x_n$ همه وجود داشته و پیوسته باشند، و به‌ازای مقداری از $(x_۱, \ldots, x_n)$ داشته باشیم $\frac{\partial F}{\partial x_j} \neq ۰$ برای هر $j = ۱, \ldots, n$. در این صورت طبق قضیهٔ تابع ضمنی، می‌توان حول این نقطه، هر x_j را تابع مشتق‌پذیر از سایر متغیرها فرض کرد و طبق (۳) داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_{j+۱}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_{j+۱}}}{\frac{\partial F}{\partial X_j}} \qquad (۹)$$

(برای $j = n$، به جای $j + ۱$ در دو مخرج، بنویسید ۱). با ضرب کردن n رابطهٔ (۹) به‌ازای $j = ۱, \ldots, n$ حاصل می‌شود:

$$(\frac{\partial x_۱}{\partial x_۲})(\frac{\partial x_۲}{\partial x_۳}) \cdots (\frac{\partial x_n}{\partial x_۱}) = (-۱)^n \qquad (۱۰)$$

(برای $n = ۲$، رابطه $\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dy} = ۱$ به‌دست می‌آید.) البته در اینجا نیز مقصود از $(\frac{\partial x_۱}{\partial x_۲})$، به طور مبسوط‌تر، $(\frac{\partial x_۱}{\partial x_۲})_{x_۳, \ldots, x_n}$ است، یعنی $x_۱$ به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از $(x_۲, \ldots, x_n)$ در نظر گرفته شده و سپس مشتق‌گیری نسبت به $x_۲$ با ثابت نگاهداشتن $x_۳, \ldots, x_n$ منظور شده است.