نقاط بحرانی

طبق معمول S را زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، a را یک نقطهٔ درونی S، و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را یک تابع دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول پیوسته می‌گیریم. در این بخش به بررسی نقاط درونی a که در آن $\nabla f(a) = \underline{0}$ می‌پردازیم. این نقاط را <u>نقاط بحرانی</u> تابع f می‌نامیم. با ذکر تعدادی مثال بحث را آغاز می‌کنیم.

<u>مثال ۱</u> (نقطهٔ می‌نیمم منزوی) f را به صورت $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$، $f(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$ در نظر می‌گیریم. $\nabla f(a) = (2x_1, \ldots, 2x_n)$ و $(0, \ldots, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی f است. تابع f در این نقطه صفر است و در سایر نقاط $\mathbb{R}^n$ مقدار مثبت دارد، پس $(0, \ldots, 0)$ مینیمم تابع f است. نمودار تابع f در حالت $n = 2$ همراه با مجموعه‌های تراز در شکل ۱ نمایش داده شده است.

<u>مثال ۲</u> (نقطهٔ ماکسیمم منزوی) اگر $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x_1, \ldots, x_n) = -\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ تعریف کنیم، $(0, \ldots, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی و ماکزیمم تابع خواهد بود (شکل ۲).

در واقع هر نقطه ماکسیمم یا مینیمم موضعی که نقطه درونی دامنه تابع بوده و تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر باشد لزوماً بحرانی است. دلیل سادهٔ این موضوع این است که اگر دامنهٔ f را به خط راست گذرا از a به موازات محور x_i محدود کنیم f روی این دامنه نیز ماکسیمم یا مینیمم موضعی در نقطهٔ a خواهد داشت، پس $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$. در واقع استدلال نشان می‌دهد که اگر تحدید f به خطوط گذرا به موازات محورها ماکسیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد، نقطه a بحرانی است.

<u>مثال ۳</u> (نقطهٔ زینی ساده) $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2$ تعریف می‌کنیم. مجدداً $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$ تنها نقطهٔ بحرانی است. اگر تابع f به محورهای $x_1, \ldots, x_k$ محدود شود، $\underline{0}$ یک نقطهٔ مینیمم روی این محورها خواهد بود ولی تحدید f به هر یک از

محورهای $x_{k+1},\dots,x_n$ در نقطهٔ $\underline{0}$ یک ماکسیمم دارد. ساده‌ترین نقطهٔ زینی در حالت $n=2$ برای $f(x,y)=x^2-y^2$ در $(0,0)$ مشاهده می‌شود. در شکل ۳ نمودار این تابع و مجموعه‌های تراز آن نمایش داده شده‌اند.

<u>مثال ۴</u> $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ به صورت $f(x,y)=x^2$ تعریف شده است. $\nabla f(x,y)=(2x,0)$ که نشان می‌دهد f در سراسر محور y بحرانی است. مقدار تابع در همه این نقاط صفر است و در سایر نقاط مثبت. مجموعهٔ تراز $f(x,y)=c$ به‌ازای $c>0$ از دو خط راست $x=\pm\sqrt{c}$ تشکیل شده است که برای $c=0$ دو خط بر هم منطبق می‌شوند. (شکل ۴)

توجه کنید که برای یک تابع دو متغیری $f(x,y)$، صفحه مماس بر نمودار تابع در یک نقطهٔ بحرانی افقی است. در مورد ماکزیمم و مینیمم منزوی این صفحه در یک طرف نمودار تابع قرار می‌گیرد، برای نقاط زینی بخشی از نمودار در یک طرف و بخشی دیگر در طرف دیگر قرار می‌گیرد. در مثال ۴ بالا صفحه مماس و نمودار در یک خط راست اشتراک دارند.

<u>مثال ۵</u> $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y)=x^2+y^3$ در نظر می‌گیریم. مجدداً تنها نقطهٔ بحرانی، نقطهٔ $\underline{0}$ است. در اینجا روی محور x، f یک مینیمم در $\underline{0}$ دارد و روی محور y، یک نقطهٔ عطف در همان نقطه. نمودار تابع در امتداد سه نیمخط از محورهای مختصات با دور شدن از $\underline{0}$ صعودی است و در امتداد نیمخط چهارم با دور شدن از $\underline{0}$ نزولی (شکل ۵).

نمودار تابع‌های مثال‌های ۱—۵ و مجموعه‌های تراز آنها

<u>مثال ٦</u> (زین میمون) تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید که به صورت $f(x,y)=x^3-3xy^2$ تعریف شده است. داریم $\nabla f(x,y)=(3x^2-3y^2,-6xy)$ و $(0,0)$ تنها نقطهٔ بحرانی است. توجه کنید که عبارت f به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$f(x,y)=x(x-\sqrt{3}y)(x+\sqrt{3}y)$$

پس مجموعهٔ تراز $f(x,y)=0$ از اجتماع سه خط متقاطع $x=0$، $x=\sqrt{3}y$ و $x=-\sqrt{3}y$ تشکیل شده است. این سه خط صفحه xy را به ٦ ناحیه تقسیم می‌کنند (شکل ٦) که علامت f روی هر یک

نمایش داده شده است. برای $c > 0$ کوچک یک مجموعه تراز نمونه در شکل ٦ رسم شده است که یک خم دارای سه بخش (شاخه) است. برای $c < 0$ نیز شکل مشابهی در سه بخش دیگر صفحه مشاهده می‌شود. نمودار این تابع روی سه نیمخط $\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ با دور شدن از $\underline{0}$ صعودی و روی سه نیمخط $\theta = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$ با دور شدن از $\underline{0}$ نزولی است.

شکل ٦

مثال‌های بالا نشان می‌دهند که تنوع رفتار تابع‌ها حول یک نقطهٔ بحرانی حتی در حالت دو بعدی به مراتب گسترده‌تر از حالت یک بعدی است. هدف بعدی ما ارائه نوعی "آزمون مشتق دوم" است که می‌تواند مانند آزمون مشتق دوم یک متغیری در تشخیص ماکسیمم و مینیمم موضعی یا نقاط زینی ساده می‌تواند مؤثر واقع شود. فرض کنید برای تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، S: زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$، نقطهٔ درونی a از S یک نقطهٔ بحرانی است و f در یک گوی باز حول a دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته است. چون مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ اول در نقطهٔ a صفر هستند، قضیهٔ تیلور با باقیماندهٔ لاگرانژ به صورت زیر در می آید:

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\xi) \cdot (x_i - a_i)(x_j - a_j) \qquad (1)$$

که در اینجا ξ نقطه‌ای روی پاره‌خط واصل از a به x است. $\frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_j}(\xi)$ را A_{ij} و $x_i - a_i$ را X_i می‌نامیم و عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \quad , \quad Q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} X_i X_j \qquad (2)$$

اگر عبارت درجه دوم همگون $Q(X)$ طوری باشد که برای $X \neq \underline{0}$ و $|X|$ کوچک، $Q(X) > 0$، از (۱) نتیجه می‌شود که f در نقطهٔ a یک مینیمم موضعی اکید دارد، و نیز اگر برای $|X|$ کوچک $X \neq \underline{0}$، $Q(X)$ منفی باشد، نتیجه می‌شود که a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی اکید برای f است. هرگاه برای مقادیر کوچک و ناصفر $|X|$، $Q(X)$ هم مقادیر مثبت و هم مقادیر منفی بپذیرد، به همین ترتیب می‌بینیم که a نه یک نقطه مینیمم موضعی و نه یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی است. بدین ترتیب چنانچه

علامت‌یابی $Q(X)$ میسر باشد، می‌توان در مورد ماهیت نقطهٔ بحرانی a حکم کرد. برای $n = 2$ یک چنین علامت‌یابی بر پایه جبر مقدماتی در دسترس است. در اینجا:

$$Q(X) = A_{11}X_1^2 + 2A_{12}X_1X_2 + A_{22}X_2^2 \qquad (3)$$

قرار می‌دهیم $\Delta = A_{12}^2 - A_{11}A_{12}$. داریم:

- اگر $\Delta < 0$، $Q(X)$ هم‌علامت A_{11} (و نیز A_{22}) است مگر وقتی $(X_1, X_2) = (0, 0)$.
- اگر $\Delta > 0$، $Q(X)$ تغییر علامت می‌دهد.

حالت دوم را دقیقتر بررسی می‌کنیم. اگر $A_{11} = A_{22} = 0$، که آنگاه $A_{12} \neq 0$، و علامت $Q(X) = 2A_{12}X_1X_2$ با علامت X_1 و X_2 تغییر می‌کند. بدین ترتیب دو خط راست $x_1 = a_1$ و $x_2 = a_2$ که از نقطهٔ بحرانی $a = (a_1, a_2)$ می‌گذرند صفحه را به چهاربخش تقسیم می‌کنند که علامت Q در آنها متناوباً مثبت و منفی است. بنابراین در این حالت a یک نقطهٔ زینی است. حال فرض کنید دست کم یکی از A_{11} و A_{22} صفر نیست، مثلاً $A_{11} \neq 0$. اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $A_{11}t^2 + 2A_{12}t + A_{22} = 0$ باشند، می‌توان نوشت:

$$Q(X) = A_{11}(X_1 - \alpha X_2)(X_1 - \beta X_2)$$

توجه کنید که $\alpha \neq \beta$ زیرا $\Delta > 0$. بنابراین وقتی نسبت $\frac{X_1}{X_2}$ از ریشه‌ها عبور می‌کند تغییر علامت حاصل می‌شود. معادلاً $Q = A_{11}(x_1 - \alpha x_2 - a_1 + \alpha a_2)(x_1 - \beta x_2 - a_1 + \beta a_2)$ ، دو خط راست متمایز $x_1 - \alpha x_2 - a_1 + \alpha a_2 = 0$ و $x_1 - \beta x_2 - a_1 + \beta a_2 = 0$ که از نقطهٔ بحرانی $a = (a_1, a_2)$ می‌گذرند صفحه را به چهار بخش تقسیم می‌کنند که Q در بخش‌های مجاور علامت مختلف دارد. بنابراین $\underline{\circ}$ یک نقطهٔ زینی است. بحث بالا را در زیر خلاصه می‌کنیم:

<u>آزمون مشتق دوم برای تابع‌های دو متغیری</u> S زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^2$ است، a یک نقطهٔ درونی S، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته در یک گوی باز حول a که a یک نقطهٔ بحرانی برای آن است. در این صورت:

الف) اگر $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$ و $f_{xx} > 0$ در نقطهٔ a، a یک نقطهٔ مینیمم موضعی اکید است.

ب) اگر $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} < 0$ و $f_{xx} < 0$ در نقطهٔ a، a یک نقطهٔ ماکسیمم موضعی اکید است.

ج) اگر $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy} > 0$، a یک نقطهٔ زینی ساده است.

ذکر چند نکته ضروری است. اول اینکه از آنجا که مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته فرض شده‌اند، هر علامت (مثبت یا منفی) که $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ و f_{xx} در a داشته باشند، همین علامت را در یک گوی باز حول a حفظ می‌کنند، پس علامت باقیماندهٔ لاگرانژ نیز به همین صورت است. دوم اینکه در (الف) و (ب)، از منفی بودن $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ نتیجه می‌شود که f_{xx} و f_{yy} هم علامت هستند، پس می‌توان به جای علامت f_{xx} از علامت f_{yy} در نقطهٔ a کمک گرفت. بالاخره اینکه وقتی $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ در نقطهٔ a صفر شود، نمی‌توان حکمی در مورد نوع نقطهٔ a ابراز کرد. مثال‌های ۴، ۵ و ۶ سه نمونهٔ متفاوت از این نوع بودند. برای تابع‌های $f(x,y) = x^4 + y^4$ و $f(x,y) = -(x^4 + y^4)$ و $f(x,y) = x^4 - y^4$، عبارت $f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ در نقطهٔ بحرانی $(0,0)$ صفر است، در حالی که این نقطه برای سه تابع فوق به ترتیب مینیمم، ماکسیمم و زینی می‌باشد.

اکنون تعمیم آزمون مشتق دوم به حالت n متغیری را در نظر می‌گیریم. همان طور که قبلاً اشاره کردیم اگر a یک نقطهٔ بحرانی برای تابع n متغیری f باشد، تعیین نوع نقطهٔ بحرانی به بررسی علامت عبارت $Q(X) = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}X_iX_j$ منجر می‌شود (به بحث پیرامون (۲) مراجعه کنید). در این حالت کلی نیز می‌توان با استفاده از قضیه‌ای در جبرخطی در مورد علامت $Q(X)$ بحث کرد. ماتریس هسیان تابع f در نقطهٔ بحرانی a را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Hf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{bmatrix}$$

از آنجا که مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم را پیوسته فرض کرده‌ایم این ماتریس متقارن است. برای هر ماتریس $n \times n$، $A = [a_{ij}]$ مقادیر ویژه A ریشه‌های معادله درجه n زیر برحسب λ هستند:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \qquad (4)$$

که در آن I ماتریس واحد $n \times n$، یعنی $\begin{bmatrix} ۱ & & ۰ \\ & \ddots & \\ ۰ & & ۱ \end{bmatrix}$ است. در جبرخطی ثابت می‌شود که اگر ماتریس A متقارن باشد (مانند ماتریس هسیان)، همهٔ ریشه‌های (۴) حقیقی هستند (تکرار ریشه‌ها ممکن است).

آزمون مشتق دوم برای تابع‌های n متغیری S زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ است، a یک نقطهٔ درونی S، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم پیوسته در یک گوی باز حول a که a یک نقطهٔ بحرانی برای آن است. مقادیر ویژهٔ ماتریس هسیان را با منظور کردن تعدد ریشه‌ها به $\lambda_۱, \ldots, \lambda_n$ نمایش می‌دهیم. در این صورت:

الف) اگر همهٔ λ_i ها مثبت باشند، a یک نقطهٔ مینیمم موضعی اکید است.

ب) اگر همهٔ λ_i ها منفی باشند، a یک نقطه ماکسیمم موضعی اکید است.

ج) اگر همهٔ λ_i ها ناصفر باشند، k تا مثبت و $(n-k)$ تا منفی، آنگاه a یک نقطهٔ زینی ساده است و n امتداد متمایز در $\mathbb{R}^n$ وجود دارد که f روی k امتداد از آنها در نقطهٔ a مینیمم موضعی دارد و روی $(n-k)$ امتداد دیگر ماکسیمم موضعی.

در حالتی که حتی یک λ_i صفر شود، رفتارهای دیگری نیز می‌توان انتظار داشت. اثبات آزمون خارج از برنامه ما است ولی توجه کنید که در حالت $n = ۲$، همان آزمون مشتق مرتبهٔ دوم توابع دو متغیری به‌دست می‌آید. در اینجا ماتریس هسیان عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه از حل معادلهٔ زیر به‌دست می‌آیند:

$$\det \begin{bmatrix} f_{xx} - \lambda & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} - \lambda \end{bmatrix} = \lambda^۲ - (f_{xx} + f_{yy})\lambda + f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^۲ = ۰ \qquad (۵)$$

شرط‌های (الف) و (ب) بالا وقتی برقرار می‌شوند که $\lambda_۱\lambda_۲ > ۰$، یعنی $f_{xy}^۲ - f_{xx}f_{yy} < ۰$ که این عیناً شرط داشتن ماکسیمم یا مینیمم موضعی است. مجموع دو ریشهٔ معادله (۵) برابر می‌شود با $f_{xx} + f_{yy}$.

پس در حالت (الف) و (ب) مثبت بودن (به ترتیب منفی بودن) هر دو مقدار ویژه معادل است با این که $f_{xx}+f_{yy}>۰$ (به ترتیب $f_{xx}+f_{yy}<۰$). ولی در این حالت f_{xx} و f_{yy} هم‌علامتند، پس همان نتیجه آزمون مشتق توابع دو متغیری به‌دست می‌آید.

<u>مثال</u> نقاط بحرانی تابع $f:\mathbb{R}^۳\longrightarrow\mathbb{R}$ که به صورت $f(x,y,z)=x^۲+۱۲yz+(y-z)^۳$ تعریف شده است را پیدا کنید و نوع آنها را شناسایی کنید.

<u>حل</u> داریم $\nabla f(x,y,z)=(۲x,۱۲z+۳(y-z)^۲,۱۲y-۳(y-z)^۲)$، و دو نقطه بحرانی $P=(۰,۰,۰)$ و $Q=(۰,۱,-۱)$ به‌دست می‌آیند. ماتریس هسیان در هر مورد به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H(P)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ \\ ۰ & ۱۲ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad H(Q)=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$$

در مورد Q، مقادیر ویژه عبارتند از ۲، ۱۲، ۱۲ که هر سه مثبت هستند، پس $(۰,۱,-۱)$ یک نقطهٔ مینیمم موضعی اکید است. برای P مقادیر ویژه را بررسی می‌کنیم:

$$\det\begin{bmatrix} ۲-\lambda & ۰ & ۰ \\ ۰ & -\lambda & ۱۲ \\ ۰ & ۱۲ & -\lambda \end{bmatrix}=۰$$

$$(۲-\lambda)(\lambda^۲-۱۴۴)=۰$$

مقادیر ویژه عبارتند از $\lambda=۲,\pm۱۲$، پس $(۰,۰,۰)$ یک نقطهٔ زینی ساده است.