مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ بالا و چندجمله‌ای تیلور

فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S است و برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، $y = f(x)$، مشتق پاره‌ای $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در همهٔ نقاط یک گوی باز حول a تعریف شده است. در این صورت $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ خود یک تابع با مقدار حقیقی است که نقطهٔ a یک نقطهٔ درونی دامنهٔ آن است. بدین ترتیب می‌توان برای تابع $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ وجود مشتق پاره‌ای نسبت به متغیر x_j را در نقطهٔ a مطرح کرد. $(\frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}))(a)$ را در صورت وجود به نمادهای زیر نمایش می‌دهیم

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \quad , \quad D_{ij} f(a) \quad , \quad f_{x_i x_j}(a) \tag{1}$$

و آن را یک مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم f در نقطه a می‌نامیم. برای تابع n متغیری $y = f(x_1, \ldots, x_n)$، می‌توان n^2 مشتق پاره‌ای مرتبهٔ دوم در نظر گرفت زیرا که در (۱)، i, j هر یک عدد صحیحی بین ۱ و n هستند. معمولاً به جای $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_j}$ می‌نویسیم $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}$.

به همین ترتیب، اگر مشتق پاره‌ای مرتبه دوم $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$ در یک گوی باز حول a تعریف شده باشد، می‌توان وجود مشتق پاره‌ای مرتبهٔ سوم $\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}) = \frac{\partial^3 y}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$ را بررسی نمود، و همین طور برای مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر.

نکتهٔ مهم در مورد مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دو به بالا این است که تحت شرایط سهل الوصول، ترتیب مشتقگیری نسبت به متغیرهای مختلف اثری بر نتیجه نهایی ندارد و تنها عامل اثرگذار تعداد دفعاتی است که مشتقگیری نسبت به متغیر خاص صورت گرفته است. قضیهٔ زیر نمونه‌ای از این نوع احکام است:

(۲۶−۱) قضیه. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ باشد، a یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طوری که $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}$ هر دو در یک گوی باز حول a تعریف شده و در نقطهٔ a پیوسته

باشند. در این صورت:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a) \tag{۲}$$

بدیهی است که می‌توان با به‌کارگیری مکرر این قضیه، حکم را به مشتق‌های پاره‌ای مرتبه‌های بالاتر تعمیم داد.

اثبات قضیه. برای سهولت در نوشتن، حالت $n = 2$ را در نظر می‌گیریم. اثبات حالت کلی عیناً به همین صورت است، کافی است استدلال را به صفحه (x_i, x_j) محدود کنیم. بدین ترتیب نقاط S را به (x, y) و نقطهٔ درونی مورد نظر را به (a, b) نمایش می‌دهیم. اگر $|h|$ و $|k|$ به اندازه کافی کوچک باشند، مستطیل $a \leq x \leq a + h$، $b \leq y \leq b + k$ (در صورتی که هر یک از h, k منفی باشد، جهت نامساوی مربوط را معکوس کنید) در درون دامنه تعریف $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ و $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ قرار می‌گیرد. از سه تابع کمکی Q، u و v به شرح زیر استفاده می‌کنیم:

$$Q(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b) \tag{۳}$$

Q تفاضل مجموع مقدار f در دو رأس مقابل مستطیل و دو رأس مقابل دیگر است.

$$u(x) = f(x, b + k) - f(x, b) \quad \text{(برای هر}k\text{ثابت)} \tag{۴}$$

$$v(y) = f(a + h, y) - f(a, y) \quad \text{(برای هر}h\text{ثابت)} \tag{۵}$$

بدین ترتیب u و v، به ترتیب، تفاضل f در دو انتهای پاره‌خط‌های قائم و افقی را نمایش می‌دهند. داریم

$$Q(h, k) = u(a + h) - u(a) \tag{۶}$$

و نیز

$$Q(h, k) = v(b + k) - v(b) \tag{۷}$$

طبق قضیهٔ مقدار میانگین یک متغیری، برای u داریم:

$$u(a+h) - u(a) = h \cdot u'(\xi) \qquad (۸)$$

که در آن ξ بین a و $a+h$ است. ضمناً مشتق u طبق (۴) از مشتق‌گیری f نسبت به x به‌دست می‌آید، پس از (۶) و (۸):

$$Q(h,k) = h[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b)] \qquad (۹)$$

حال اگر تابع $\frac{\partial f}{\partial x}$ را به عنوان تابعی از متغیر دوم آن در نظر بگیریم، طبق قضیهٔ میانگین یک متغیری داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, b) = k\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \qquad (۱۰)$$

که در اینجا η بین b و $b+k$ است. پس

$$Q(h,k) = kh\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \qquad (۱۱)$$

حال به همین ترتیب، اگر به جای u، از v استفاده کنیم، نقطه η' بین b و $b+k$، نقطه ξ' بین a و $a+h$ به‌دست می‌آیند که:

$$Q(h,k) = kh\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') \qquad (۱۲)$$

از مقایسه (۱۱) و (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta') = \frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \qquad (۱۳)$$

توجه کنید که (ξ, η) و (ξ', η') دو نقطه در مستطیل شکل ۱ هستند، پس وقتی $(h,k) \longrightarrow (۰,۰)$، هر دو نقطه به (a,b) میل می‌کنند. از پیوستگی $\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}$ و $\frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}$ در (a,b) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{\partial^{۲} f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial^{۲} f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

چنان که حکم بود. ■

مثال ۱. برای $f:\mathbb{R}^۲\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x,y)=xe^y-y^۲x^۳$، مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ دوم را محاسبه کنید.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=e^y-۳x^۲y^۲\quad,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=xe^y-۲yx^۳$$

$$\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}=-۶xy^۲\qquad,\quad \frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}=e^y-۶x^۲y\quad,\quad \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}=xe^y-۲x^۳$$

مثال ۲. کلیه مشتق‌های پاره‌ای از همه مراتب $f(x,y)=ye^x$ را محاسبه کنید.

از عبارات بالا مشخص است که همه مشتق‌های پاره‌ای وجود دارند و پیوسته خواهند بود، بنابراین ترتیب مشتقگیری اهمیتی ندارد. اگر از عبارت فوق یک بار نسبت به y مشتقگیری شود، متغیر y حذف می‌شود، پس می‌توان نوشت

$$\frac{\partial^{k+l}f}{\partial x^k\partial y^l}=۰ \quad \text{اگر} \quad l\geq ۲$$

همچنین نتایج زیر نیز به‌دست می آیند:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}=ye^x\quad,\quad \frac{\partial^{k+۱}f}{\partial x^k\partial y}=e^x$$

یکی از کاربردهای مهم مشتقهای مرتبهٔ بالا ارائه تقریبهای مرتبهٔ بالا برای تابع‌ها به‌صورت چندجمله‌ای تیلور است. در همین رابطه آزمون مشتق دوم برای تعیین نوع نقاط بحرانی (یعنی نقاطی که در آن مشتق صفر است) و تعیین جهت تحدب نمودار یک تابع را نیز باید نام برد. مشابه همین ملاحظات را می‌توان تابعهای چندمتغیری نیز مطرح نمود. برای این منظور نخست حالت یک متغیری چندجمله‌ای‌های تیلور و خواص آنها را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید I یک بازه در $\mathbb{R}$، a یک نقطهٔ درونی I، و $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ تابعی باشد که در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است. تقریب خطی f در نقطهٔ a، چندجمله‌ای درجه ۱ زیر است:

$$f(a)+f'(a)\cdot(x-a) \tag{۱۴}$$

این چندجمله‌ای را به $T_۱(x)$ نمایش می‌دهیم. هر یک از دو ویژگی زیر $T_۱(x)$ را از میان چندجمله‌ای‌های درجه یک به طور منحصر به فرد متمایز می‌کنند:

الف) $T_1(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه یک است که $T_1(a) = f(a)$ و $T'_1(a) = f'(a)$.

ب) $T_1(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه یک است که $T_1(a) = f(a)$ و $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_1(x)}{|x-a|} = 0$.

قبلاً دیده‌ایم که (ب) را می‌توان به این صورت تعبیر کرد که $T_1(x)$ "نزدیک‌ترین تقریب درجه یک" به f حول $x = a$ است، و چندجمله‌ای‌های تیلور این وضعیت را به تقریب‌های درجهٔ بالاتر تعمیم می‌دهند. اگر f در نقطهٔ a دارای مشتق تا مرتبهٔ p (با شمول درجهٔ p) باشد، چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f حول a به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_p(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \cdot (x-a)^p$$

به طور کلی می‌توان انتظار داشت که با بالا بردن درجه، تقریب‌های بهتری از تابع f به‌دست می آید زیرا که برای $q < p$، می‌توان هر چندجمله‌ای درجه q را یک چندجمله‌ای درجه p (با ضرایب صفر پس از درجهٔ q) فرض کرد و بدین ترتیب "بهترین تقریب درجهٔ q" نمی‌تواند اکیداً بهتر از "بهترین تقریب درجهٔ p" باشد. در واقع مشابه خواص (الف) و (ب) برای $T_p(x)$ نیز برقرار است:

الف) $T_p(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه p است که $T_p(a) = f(a)$، $T'_p(a) = f'(a)$، ...، $T_p^{(p)}(a) = f^{(p)}(a)$.

ب) $T_p(x)$ یگانه چندجمله‌ای درجه p است که $T_p(a) = f(a)$ و $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_p(x)}{|x-a|^p} = 0$.

بدین ترتیب مشتقات f تا مرتبهٔ p در نقطهٔ a با مشتقات متناظر f برابرند و این امر، طبق (ب)، تقریبی آن چنان نزدیک از f حول a می‌دهد که تفاضل $f(x) - T_p(x)$ سریعتر از $|x-a|^p$ به صفر میل می‌کند وقتی $x \to a$. در مورد دقت این تقریب، راه‌های گوناگونی برای تخمین خطا وجود دارد. یکی از معمولترین روش‌ها، استفاده از "باقیماندهٔ لاگرانژ" است. طبق این روش، اگر f در بازهٔ بین a و x، دارای مشتق مرتبهٔ $(p+1)$ باشد، آنگاه نقطه‌ای ξ بین a و x وجود دارد که:

$$f(x) - T_p(x) = \frac{1}{(p+1)!} f^{(p+1)}(\xi) \cdot (x-a)^{p+1} \tag{15}$$

بدین ترتیب، مثلاً دقت تقریب خطی به قدرمطلق مشتق دوم تابع وابسته است. چنانچه مشتق مرتبهٔ دوم دارای قدرمطلق کوچک باشد، میزان تحدب یا تقعر تابع (به انحناء به انحراف از خط راست) کوچک است و نمودار تابع نزدیک به تقریب خطی می‌ماند، ولی اگر قدرمطلق مشتق دوم بزرگ باشد، نمودار تابع به سرعت از تقریب خطی دور می‌شود.

هدف ما در باقیماندهٔ این بخش این است که ملاحظات بالا را به تابع‌های چند متغیری تعمیم دهیم. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. چون a یک نقطهٔ درونی S است، اگر نقطهٔ x در S به اندازه کافی نزدیک به a باشد، پاره‌خط واصل بین a و x به تمامی در S قرار می‌گیرد. این پاره‌خط را به صورت $a + t(x - a)$، $\circ \leq t \leq ۱$، پرمایش می‌کنیم. گاهی به جای $x - a$ می‌نویسیم h، پس $h = (h_۱, \ldots, h_n) = (x_۱ - a_۱, \ldots, x_n - a_n)$. مقدار تابع f روی پاره خطی بالا را به $\varphi(t)$ نمایش می‌دهیم، پس:

$$\begin{cases} \varphi(t) = f(a + th) \\ \varphi(\circ) = f(a), \varphi(۱) = f(x) \end{cases} \qquad (۱٦)$$

اگر f در همهٔ نقاط پاره‌خط $a + th$ مشتق‌پذیر باشد، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= Df(a + th) \cdot h \\ &= \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + th) \cdot (x_i - a_i) \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

پس $\varphi'(\circ) = \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i)$ و چندجمله‌ای تیلور φ به‌ازای $t = ۱$ برابر می‌شود با:

$$\varphi(\circ) + \varphi'(\circ) \cdot (۱ - \circ) = f(a) + \sum_{i=۱}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) \qquad (۱۸)$$

عبارت سمت راست همان چندجمله‌ای درجه یک نسبت به $x_۱, \ldots, x_n$ است که به عنوان تقریب درجه یک تابع f در نقطهٔ a می‌شناسیم. به همین ترتیب، فرض می‌کنیم هر یک از مشتقات پاره‌ای $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ خود تابعی مشتق‌پذیر در طول پاره‌خط $a + th$ است (مثلاً با این فرض که مشتقات پاره‌ای مرتبه دوم f

پیوسته‌اند) و با مشتق‌گیری مجدد از (۵) داریم:

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th)\cdot h_j)(x_i-a_i)\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a+th)\cdot(x_j-a_j)(x_i-a_i)\end{aligned}\tag{19}$$

پس چندجمله‌ای تیلور درجه دوم φ به‌ازای $t=1$ برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned}&\varphi(0)+\varphi'(0)(1-0)+\frac{1}{2!}\varphi''(0)(1-0)^2\\ &= f(a)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\cdot(x_i-a_i)+\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot(x_i-a_i)(x_j-a_j)\end{aligned}\tag{20}$$

توجه کنید که این عبارت یک چندجمله‌ای درجه دوم نسبت به $x_1,\dots,x_n$ است. طرف راست (۷) را چندجمله‌ای تیلور درجه دوم تابع f حول a می‌نامیم. به طور کلی، اگر f دارای مشتقات پاره‌ای پیوسته از مرتبهٔ pـ ام باشد، با مشتق‌گیری مکرر می‌توانیم چندجمله‌ای تیلور درجهٔ p تابع یک متغیری φ را تشکیل دهیم. مقدار این چندجمله‌ای به‌ازای $t=1$، چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f حول a خوانده می‌شود. جزء ثابت این چندجمله‌ای، $f(a)$؛ جزء درجه یک (نسبت به x_1-a_1، ...، x_n-a_n) برابر $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i-a_i)$؛ جزء درجه دو برابر $\frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\cdot(x_i-a_i)(x_j-a_j)$ و ...، تعریف می‌شوند. توجه کنید که جزء درجه k از مجموع جملات به شکل زیر تشکیل شده است:

$$(\frac{1}{k!})\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)\cdot(x_{i_1}-a_{i_1})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})\tag{21}$$

(تکرار اندیس در بین i_j ها ممکن است) که در آن هر i_j همهٔ مقادیر ممکن بین ۱ تا n را اتخاذ می‌کند. اگر چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f را به $T_p(x_1,\dots,x_n)$ نمایش دهیم، از (۱) نتیجه می‌شود که برای $k=p$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)=\frac{\partial^k T_p}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}(a)\tag{22}$$

(چرا؟)، یعنی ویژگی مشابه (الف) حالت یک متغیری همچنان برقرار است.

قبل از ادامه بحث، برای مأنوس شدن بیشتر با شکل چندجمله‌ای تیلور، چندجمله‌ای تیلور یک تابع دو متغیری را به طور صریح محاسبه می‌کنیم. به جای $(x_۱, x_۲)$ می‌نویسیم (x, y) و به جای $(a_۱, a_۲)$ می‌نویسیم (a, b). اجزاء زیر به‌دست می آیند:

جزء درجه صفر: $f(a,b)$

جزء درجه ۱: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)$

جزء درجه ۲: $\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(a,b)\cdot(x-a)^۲+\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}(a,b)\cdot(y-b)(x-a)+\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(a,b)\cdot(y-b)^۲]$

اگر مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ دوم f پیوسته باشند، نتیجه می‌شود که $\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^۲ f}{\partial y\partial x}$، پس جزء درجه دوم به شکل زیر خلاصه می‌شود:

$$\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(a,b)\cdot(x-a)^۲+۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(a,b)\cdot(y-b)^۲]$$

به همین ترتیب اگر مشتقات پاره‌ای مرتبهٔ سوم f پیوسته باشند، به جای ۸ نوع جمله ممکن درجهٔ ۳، فقط چهارنوع به صورت زیر ظاهر می‌شوند:

جزء درجه ۳: $\frac{۱}{۳!}[\frac{\partial^۳ f}{\partial x^۳}(a,b)\cdot(x-a)^۳+۳\frac{\partial^۳ f}{\partial x^۲\partial y}(a,b)\cdot(x-a)^۲(y-b)+۳\frac{\partial^۳ f}{\partial x\partial y^۲}(a,b)\cdot(x-a)(y-b)^۲+\frac{\partial^۳ f}{\partial y^۳}(a,b)\cdot(y-b)^۳]$

ضرایب اجزاء درجه ۲ و درجه ۳ که به ترتیب $(۱,۲,۱)$ و $(۱,۳,۳,۱)$ هستند دقیقاً ضرایب بسط دوجمله‌ای $(A+B)^۲$ و $(A+B)^۳$ می‌باشند. در واقع با مشتق‌گیری مکرر و استقراء به سادگی دیده می‌شود که جزء درجه k نیز به همین شکل عمومی است، یعنی:

$$\frac{۱}{k!}[\sum_{i=۰}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^k f}{\partial x^i\partial y^{k-i}}(a,b)\cdot(x-a)^i(y-b)^{k-i}] \qquad (۲۳)$$

که در اینجا $\binom{k}{i}=\frac{k!}{i!(k-i)!}$. برای به خاطر سپردن (۱۰) بیان نمادین زیر می‌تواند مفید باشد:

$$\frac{۱}{k!}[(x-a)\frac{\partial}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial}{\partial y}]^k\cdot f\quad(a,b) \qquad (۲۴)$$

در حالت n متغیری نیز، ضرایب برابر ضرایب بسط توان k یک n جمله‌ای، یعنی ضرایب

$(A_1 + \cdots + A_n)^k$ می‌شوند و می‌توان جزء درجه k را به شکل نمادین زیر نمایش داد:

$$\frac{1}{k!}[(x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}]^k \cdot f \quad (a) \tag{۲۵}$$

گاهی $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ را به "بردار نمادین" ∂ و $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ را به Δ نمایش داده و عبارت داخل کروشه را به عنوان ضرب داخلی نمادین این دو "بردار" در نظر می‌گیرند که در این صورت (۱۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{k!}(\Delta \cdot \partial)^k f \quad (a) \tag{۲۶}$$

بدین ترتیب چندجمله‌ای تیلور درجه p تابع f را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$f(a) + \frac{1}{1!}(\Delta \cdot \partial)f(a) + \frac{1}{2!}(\Delta \cdot \partial)^2 f(a) + \cdots + \frac{1}{p!}(\Delta \cdot \partial)^p f(a) \tag{۲۷}$$

شکل فوق مستقل از تعداد متغیرهاست. قبل از پرداختن به خواص و کاربردهای چندجمله‌ای تیلور، یکی دومثال از محاسبهٔ چندجمله‌ای تیلور را مطرح می‌کنیم.

مثال ۱ چندجمله‌ای تیلور درجه ۲ تابع $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 - y}$ را حول $(1, 3)$ محاسبه می‌کنیم. تابع $\sqrt[3]{\ }$ جز در صفر از همه مراتب مشتق دارد و عبارت $x^2 - y$ نسبت به (x,y) از هر مرتبه مشتق‌پذیر است، پس در نقطهٔ $(1, 3)$ که زیر $\sqrt[3]{\ }$ صفر نمی‌شود می‌توان چندجمله‌ای تیلور از هر مرتبه را در نظر گرفت. در اینجا:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{3}(x^2 - y)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{3}(x^2-y)^{-\frac{2}{3}} - \frac{8x^2}{9}(x^2-y)^{-\frac{5}{3}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4x}{9}(x^2-y)^{-\frac{5}{3}} \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{2}{9}(x^2-y)^{-\frac{5}{3}}$$

پس چندجمله‌ای تیلور درجه ۲ عبارت است از:

$$f(۳,۱)+\frac{\partial f}{\partial x}(۳,۱)\cdot(x-۳)+\frac{\partial f}{\partial y}(۳,۱)\cdot(y-۱)+\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(۳,۱)(x-۳)^۲$$
$$+۲\tfrac{\partial^۲ f}{\partial x\partial y}(۳,۱)(x-۳)(y-۱)+\tfrac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(۳,۱)(y-۱)^۲]$$

$$=۲+\frac{۱}{۲}(x-۳)-\frac{۱}{۱۲}(y-۱)+\frac{۱}{۲!}[(-\frac{۱}{۱۲})(x-۳)^۲+\frac{۱}{۱۲}(x-۳)(y-۱)-\frac{۱}{۱۴۴}(y-۱)^۲]$$

$$=۲+\frac{۱}{۲}(x-۳)-\frac{۱}{۱۲}(y-۱)-\frac{۱}{۲۴}(x-۳)^۲+\frac{۱}{۲۴}(x-۳)(y-۱)-\frac{۱}{۲۸۸}(y-۱)^۲$$

<u>مثال ۲</u> چندجمله‌ای تیلور تابع $f(x,y,z)=x^۲y^۳-xz$ از همهٔ درجات را حول $(۱,۱,۰)$ محاسبه می‌کنیم. نتیجه در هر حالت باید یک چندجمله‌ای برحسب $(x-۱)$، $(y-۱)$ و $z=(z-۰)$ باشد. در عبارت داده شده برای f، به جای x، $(x-۱)+۱$، و به جای y، $(y-۱)+۱$ قرار می‌دهیم:

$$f(x,y,z)=((x-۱)+۱)^۲((y-۱)+۱)^۳-((x-۱)+۱)z$$

و جملات را به ترتیب توان برحسب $(x-۱)$، $(y-۱)$ و z مرتب می‌کنیم:

جزء ثابت: ۱

جزء درجه ۱: $۲(x-۱)+۲(y-۱)-z$

جزء درجه ۲: $(x-۱)^۲+۳(y-۱)^۲+۶(x-۱)(y-۱)-(x-۱)z$

جزء درجه ۳: $(y-۱)^۳+۳(x-۱)^۲(y-۱)+۶(x-۱)(y-۱)^۲$

جزء درجه ۴: $۳(x-۱)^۲(y-۱)^۲+۲(x-۱)(y-۱)^۳$

جزء درجه ۵: $(x-۱)^۲(y-۱)^۳$

برای به‌دست آوردن چندجمله‌ای تیلور درجه k حول $(۱,۱,۰)$ اجزاء تا درجهٔ k را با هم جمع می‌کنیم. بدین ترتیب چندجمله‌ای‌های تیلور درجه ۵ به بالا همه برابرند. توجیه این روش یگانگی چندجمله‌ای تیلور است. در واقع طبق (۹) ضریب جملهٔ $(x_{i_۱}-a_{i_۱})\cdots(x_{i_k}-a_{i_k})$ برابر است با $\frac{۱}{k!}\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_۱}\ldots\partial x_{i_k}}(a)$. حال اگر از

$$f(x,y,z)=۱+[۲(x-۱)+۲(y-۱)-z]+\cdots+[(x-۱)^(y-۱)^۳]$$

از هر مرتبه مشتق گرفته و $(x,y,z)=(۱,۱,۰)$ را جایگزین می‌کنیم ضرایب بالا به‌دست می‌آیند.

اکنون به ذکر پاره‌ای از خواص چندجمله‌ای تیلور می‌پردازیم. این خواص به سادگی از خواص مشابه در حالت یک متغیری به یاری تابع کمکی $\varphi(t)=f(a+th)$ که در آغاز این جلسه ذکر شد به‌دست می‌آیند. ویژگی مشابه (الف) در (۹) آمد. برای (ب) توجه کنید که:

$$f(a_1+th_1,\ldots,a_n+th_n)-T_p(a_1+th_1,\ldots,a_n+th_n)=\varphi(t)-[\varphi(0)+\varphi'(0)t+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}t^p]$$

عبارت طرف راست وقتی بر $|t|^p$ تقسیم شود، بنابر ویژگی چندجمله‌ای تیلور یک متغیری به صفر میل می‌کند وقتی $t\longrightarrow 0$، از طرفی دیگر با قرار دادن $x=a+th$، می‌بینیم که $x\longrightarrow a$ معادل $t\longrightarrow 0$ است. بالاخره نوعی تخمین خطا به شکل باقیماندهٔ لاگرانژ را بررسی می‌کنیم. برای $t=1$ در عبارت بالا داریم

$$f(x)-T_p(x)=\varphi(1)-[\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot 1+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}\cdot 1^p]$$

فرض می‌کنیم f دارای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ $(p+1)$ پیوسته باشد که در نتیجه $\varphi(t)=f(a+th)$، $(p+1)$ بار مشتق‌پذیر خواهد شد و با استفاده از باقیماندهٔ لاگرانژ در حالت یک متغیری عددی t_0 بین ۰ و ۱ وجود دارد که:

$$\varphi(1)-[\varphi(0)+\varphi'(0)\cdot 1+\cdots+\frac{\varphi^{(p)}(0)}{p!}\cdot 1^p]=\frac{\varphi^{(p+1)}(t_0)}{(p+1)!}\cdot 1^{p+1}$$

اگر نقطهٔ $a+t_0h$ را ξ بنامیم، عبارت طرف راست مشابه جزء درجه $(p+1)$ چندجمله‌ای تیلور به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{(p+1)!}(\Delta\cdot\partial)^{p+1}\cdot f\quad(\xi) \tag{۲۸}$$

عبارت فوق را باقیماندهٔ لاگرانژ در حالت n متغیری می‌نامند. مقدار آن خطای تقریب به وسیلهٔ چندجمله‌ای تیلور درجهٔ p را نمایش می‌دهد و همان طور که انتظار می‌رود به مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ $(p+1)$ (در یک نقطهٔ نامشخص روی پاره‌خط واصل از a به x) وابسته است. برای به کار گرفتن (۲۸) باید کرانی برای مشتق‌های پاره‌ای مرتبهٔ $(p+1)$ در دست داشت.

<u>مثال ۳</u> مقداری تقریبی برای $\sqrt[3]{(۳/۱)^۲ - (۰/۹)}$ از روش تقریب خطی به‌دست آورید و خطا را تخمین بزنید. در اینجا تابع $f(x,y) = \sqrt[3]{x^۲ - y}$ که قبلاً بررسی شد به ذهن می‌رسد. چون $f(۳,۱) = ۲$ و $(۳/۱, ۰/۹)$ نزدیک $(۳,۱)$ است، از تقریب خطی f حول $(۳,۱)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(۳ + ۰/۱, ۱ - ۰/۱) \sim ۲ + \frac{۱}{۲}(۰/۱) - \frac{۱}{۱۲}(-۰/۱) = ۲ + \frac{۱}{۲۰} + \frac{۱}{۱۲۰} = ۲/۰۵۸\overline{۳}$$

با استفاده از باقیمانده لاگرانژ خطای این تقریب را تخمین می‌زنیم. برای نقطه‌ای (ξ,η) بین $(۳,۱)$ و $(۳/۱, ۰/۹)$ خطا برابر است با:

$$\frac{۱}{۲!}[\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(\xi,\eta)\cdot(۰/۱)^۲ + ۲\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)\cdot(۰/۱)(-۰/۱) + \frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(\xi,\eta)\cdot(-۰/۱)^۲]$$

طبق محاسبات مشتق دوم در مثال ۱:

$$|\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(\xi,\eta)| \le (\frac{۲}{۳})\frac{۱}{\sqrt[3]{(\xi^۲ - \eta)^۲}} + (\frac{۸}{۹})\frac{\xi^۲}{\sqrt[3]{(\xi^۲ - \eta)^۵}}$$

ماکزیمم عبارت طرف راست وقتی حاصل می‌شود که مخرج کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد و در پاره‌خط واصل بین $(۳,۱)$ و $(۳/۱, ۰/۹)$ این وقتی حاصل می‌شود که $\xi = ۳$ و $\eta = ۱$، پس

$$|\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}(\xi,\eta)| \le \frac{۱}{۶} + (\frac{۸}{۹})\frac{۱۰}{۳۲} = \frac{۴}{۹}$$

(توجه کنید که برای $\xi^۲$ کران بالایی $(۳/۱)^۲ < ۱۰$ در نظر گرفته شده است.) به همین ترتیب:

$$|\frac{\partial^۲ f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)| \le (\frac{۴}{۹})\frac{۳/۱}{۳۲} = \frac{۱}{۸} \times \frac{۳/۱}{۹} < \frac{۳/۲}{۸ \times ۹} = \frac{۴}{۹۰}$$

$$|\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}(\xi,\eta)| \le (\frac{۲}{۹})\frac{۱}{۳۲} = \frac{۱}{۱۴۴}$$

پس

$$|\text{خطا}| \le \frac{۱}{۲۰۰}(\frac{۴}{۹} + \frac{۸}{۹۰} + \frac{۱}{۱۴۴}) = \frac{۱۱۶۲}{۲۰۰ \times ۱۴۴۰} < \frac{۱}{۲۰۰} = ۵ \times ۱۰^{-۳}$$

پس تقریب به‌دست آمده حداقل تا دو رقم اعشار درست است. محاسبه با ماشین حساب $\sqrt[3]{(3/1)^2 - (0/9)}$ را $2/0574978$ می‌دهد که با این نتایج سازگار است.

در اینجا باید ذکر کرد که روش‌های دیگری به جز باقیماندهٔ لاگرانژ برای تخمین خطا وجود دارد. از جمله، روش "باقیمانده انتگرال" که در آن به جای استفاده از مشتق‌های مرتبهٔ $(p+1)$ در یک نقطهٔ نامشخص، از نوعی میانگین موزون مشتق‌های مرتبهٔ $(p+1)$ در سراسر پاره‌خط واصل میان a و x استفاده می‌شود.

در پایان مختصراً به سری تیلور اشاره می‌کنیم. اگر تابع f در نقطهٔ a (یک نقطه درونی زیرمجموعهٔ S از $\mathbb{R}^n$) دارای مشتق‌های پاره‌ای از همه مراتب باشد، می‌توان سری تیلور آن حول a را به صورت زیر تشکیل داد:

$$f(a) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}((\Delta \cdot \partial)^i f)(a)$$

موضوع مهم در اینجا، مانند حالت یک متغیری، وجود عددی $\rho > 0$ است که در گوی شعاع ρ حول a، یعنی به‌ازای x های دامنه که $|x-a| < \rho$، سری بالا به مقدار تابع f میل کند. چنین $\rho > 0$ ممکن است وجود داشته باشد یا نباشد. مانند حالت یک متغیری، اگر بتوانیم نشان دهیم که باقیماندهٔ لاگرانژ (یا هر صورت دیگر باقیمانده)، به‌ازای $|x-a| < \rho$، به صفر میل می‌کند وقتی $p \longrightarrow +\infty$، آنگاه همگرایی سری تیلور ثابت می‌شود.