قاعدهٔ زنجیره‌ای (۲)

در این جلسه مثال‌هایی از نحوهٔ استفاده از قاعدهٔ زنجیری ارائه خواهیم کرد.

مثال ۱. فرض کنید دمای ناحیه‌ای در $\mathbb{R}^۳$ در همسایگی نقطهٔ $(۰,۰,۰)$ از فرمول $T = \frac{۱۰۰}{۱+x^۲+y^۲+z^۲}$ تبعیت می‌کند. مکان متحرکی مجهز به یک دماسنج در زمان t به وسیلهٔ $(x,y,z) = (۱+t, t^۲, t-t^۳)$ داده شده است. آهنگ تغییر دمای نمایش داده شده توسط دماسنج را در لحظهٔ $t = ۱$ به‌دست آورید.

در اینجا T به عنوان تابعی از (x,y,z) ارائه شده است و (x,y,z) به عنوان تابعی از زمان، t:

$$t \longrightarrow (x,y,z) \longrightarrow T$$

بنابراین قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر در می آید:

$$[\frac{dT}{dt}] = [\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}] \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

در $t = ۱$ داریم $(x,y,z) = (۲,۱,۰)$:

$$\begin{aligned}
[\frac{\partial T}{\partial x} \quad \frac{\partial T}{\partial y} \quad \frac{\partial T}{\partial z}]|_{(۲,۱,۰)} &= [\frac{-۲۰۰x}{(۱+x^۲+y^۲+z^۲)^۲}, \frac{-۲۰۰y}{(۱+x^۲+y^۲+z^۲)^۲}, \frac{-۲۰۰x}{(۱+x^۲+y^۲+z^۲)^۲}]|_{(۲,۱,۰)} \\
&= [-\frac{۴۰۰}{۳۶} \quad -\frac{۲۰۰}{۳۶} \quad ۰] \\
&= [-\frac{۱۰۰}{۹} \quad -\frac{۵۰}{۹} \quad ۰]
\end{aligned}$$

از طرفی دیگر

$$\begin{aligned}(\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt})|_{t=۱} &= (۱ \quad ۲t \quad ۱-۳t^۲)|_{t=۱} \\ &= (۱ \quad ۲ \quad -۲)\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= -\frac{۱۰۰}{۹} - \frac{۱۰۰}{۹} + ۰ \\ &\simeq -۲۲/۲۲\end{aligned}$$

مثال ۲. تابعی $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $z = x^۲ - y^۲$ داده شده است. اگر (r, θ) مختصات قطبی در صفحهٔ xy باشند، $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ را محاسبه کنید.

در اینجا باید $z = x^۲ - y^۲$ را به عنوان تابعی از (r, θ) در نظر بگیریم و سپس $\frac{\partial z}{\partial r}$ و $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ را محاسبه کنیم. در این مثال ساده می‌توان به راحتی z را برحسب (r, θ) نوشت و محاسبهٔ مستقیم مشتق‌های پاره‌ای را انجام داد ولی اگر عبارت تعریف کنندهٔ تابع پیچیده‌تر باشد اغلب استفاده از قاعدهٔ زنجیری کوتاه‌تر است. برای روشن شدن روش از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم. داریم:

$$(r, \theta) \longrightarrow (x, y) \longrightarrow z$$

بنابراین قاعدهٔ زنجیری به صورت زیر در می‌آید:

$$[\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}] = [\frac{\partial z}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y}] \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

هر یک از دو ماتریس طرف راست را محاسبه می‌کنیم:

$$[\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}] = [۲x \quad -۲y]$$

با توجه به $x = r\cos\theta$ ،$y = r\sin\theta$ داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & r\cos\theta \\ \sin\theta & -r\sin\theta \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\
&= (۲r\cos\theta)(\cos\theta)+(-۲r\sin\theta)(\sin\theta)\\
&= ۲r\cos ۲\theta\\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\\
&= (۲r\cos\theta)(r\cos\theta)+(-۲r\sin\theta)(-r\sin\theta)\\
&= ۲r^۲
\end{aligned}$$

مثال ۳. در بحث مربوط به گرادیان اشاره کردیم به این مطلب که اگر $f: S \longrightarrow \mathbb{R}$، $S \subset \mathbb{R}^n$، تابعی مشتق‌پذیر باشد و $\bigtriangledown f(a) \neq \underline{\circ}$، آنگاه $\bigtriangledown f(a)$ بر مجموعهٔ تراز تابع f که از نقطهٔ a می‌گذرد در آن نقطه عمود است. عمود بودن بردار $\bigtriangledown f(a)$ بر مجموعهٔ تراز را بدین معنی گرفتیم که $\bigtriangledown f(a)$ بر هر بردار مماس بر مجموعهٔ تراز در نقطهٔ a عمود است و دلایلی شهودی برای این واقعیت ارائه کردیم. اکنون اثبات دقیق‌تری از این مطلب به کمک قاعدهٔ زنجیری ارائه می‌کنیم. فرض کنید v برداری مماس بر مجموعهٔ تراز مورد نظر در نقطهٔ a باشد. در این صورت یک منحنی پارامتری مشتق‌پذیر $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^n$، I یک بازه در $\mathbb{R}$، وجود دارد که تصویر آن به تمامی روی مجموعهٔ تراز قرار دارد، در زمانی $t_\circ \in I$ از نقطهٔ a می‌گذرد، $\alpha(t_\circ) = a$، و بردار سرعت آن برابر v است، $\alpha'(t_\circ) = v$ (این مطلب نیاز به اثبات دارد که در جلسات بعد ارائه خواهد شد).

طبق تعریف مجموعهٔ تراز، f روی مجموعهٔ تراز گذرا از a مقداری ثابت دارد، پس $f(\alpha(t)) = c$ که $c \in \mathbb{R}$ مقداری ثابت است، پس $\frac{d}{dt}(f(\alpha(t))) = \circ$، و طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای:

$$(D(f\circ\alpha))(t_\circ) = Df(\alpha(t_\circ))\circ D\alpha(t_\circ)$$

یا با نوشتن $\alpha(t)=(x_1,\dots,x_n)$:

$$\frac{d}{dt}((f\circ\alpha)(t))|_{t=t_0}=[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)]\begin{bmatrix}\frac{dx_1}{dt}(t_0)\\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt}(t_0)\end{bmatrix}=\triangledown f(a)\cdot v$$

پس $\triangledown f(a)\cdot v=0$ و حکم به اثبات می‌رسد.

مثال ۴ (اصل بقای انرژی برای دستگاه‌های پایسته). یک دستگاه مکانیکی نیوتنی در نظر می‌گیریم با مختصات مکانی $(x_1,\dots,x_n)$، مختصات سرعتی $(v_1,\dots,v_n)$، و جرم‌های $m_1,\dots,m_n$. مثلاً می‌توان k ذره در $\mathbb{R}^3$ را در نظر گرفت که تحت اثر متقابل گرانشی در حرکتند. در این صورت $n=3k$، (x_1,x_2,x_3) مختصات مکانی ذره اول، (v_1,v_2,v_3) سرعت ذره اول، و $m_1=m_2=m_3$ جرم ذرهٔ اول است.

برای ذره دوم، (x_4,x_5,x_6)، (v_4,v_5,v_6) و $m_4=m_5=m_6$ در نظر گرفته می‌شوند و غیره. این دستگاه را پایسته می‌نامیم در صورتی که تابعی مشتق‌پذیر U از $(x_1,\dots,x_n)$ وجود داشته باشد (موسوم به پتانسیل) که:

$$\vec{F}=-\triangledown U$$

که در اینجا $\vec{F}$ بردار نیرو است و در فرمول نیوتن $\vec{F}=m\vec{a}$ صدق می‌کند. مقصود از $\vec{a}=(a_1,\dots,a_n)$ بردار شتاب است و $m\vec{a}$ یک خلاصه نویسی برای $(m_1a_1,\dots,m_na_n)$ می‌باشد. انرژی جنبشی دستگاه را به صورت $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_iv_i^2$ تعریف می‌کنیم و $E=U+K$ را انرژی دستگاه می‌نامیم. E تابعی از $(x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n)$ است. در سیر تحول دستگاه، این $(2n)$ تایی به عنوان تابعی از زمان، t، تغییر می‌کنند. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\frac{dE}{dt}=0$$

یعنی E در طی تحول دستگاه ثابت می‌ماند. در واقع باید ثابت کنیم که مشتق ترکیب دو تابع زیر صفر است:

$$t \longrightarrow (x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) \longrightarrow E$$

طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\tfrac{dE}{dt} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial v_i}\frac{dv_i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-\frac{\partial U}{\partial x_i})v_i + \sum_{i=1}^{n}(m_i v_i)(a_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(-m_i a_i)v_i + \sum_{i=1}^{n}(m_i v_i)(a_i) \\
&= 0
\end{aligned}$$

مثال ۵ (فرمول اویلر). S را زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}^n$ متشکل از $(x_1, \dots, x_n)$ هایی می‌گیریم که همهٔ x_i ها مثبت هستند. تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ را همگون از درجهٔ d می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر $r > 0$ داشته باشیم:

$$f(rx_1, \dots, rx_n) = r^d f(x_1, \dots, x_n) \qquad (1)$$

رابطهٔ زیر به فرمول اویلر معروف است:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = df(x_1, \dots, x_n) \qquad (2)$$

برای اثبات (۱)، از دو طرف (۱) نسبت به r مشتق می‌گیریم. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}[f(rx_1, \dots, rx_n)] &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(rx_1, \dots, rx_n) \cdot \frac{\partial (rx_i)}{\partial r} \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(rx_1, \dots, rx_n) \\
\frac{\partial}{\partial r}[r^d f(x_1, \dots, x_n)] &= dr^{d-1} f(x_1, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

با برابر قرار دادن دو طرف و جایگزینی $r = ۱$ فرمول اویلر به‌دست می‌آید.