میدان گرادیان

فرض کنید تابع $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ داده شده است، $S \subset \mathbb{R}^n$، که در سراسر S مشتق‌پذیر است. می‌دانیم که برای هر $a \in S$ و هر $v \in \mathbb{R}^n$:

$$D_v f(a) = (Df(a))(v) \tag{۱}$$

بازنویسی جالب توجهی از (۱) وجود دارد که منشاء بحث این بخش است. چون برد تابع f فضای یک بعدی $\mathbb{R}$ است، ماتریس $Df(a)$ یک ماتریس $n \times ۱$ می‌باشد و وقتی $v = (v_۱, \ldots, v_n)$ به صورت یک ستون نوشته شود سمت راست (۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a)v_۱ + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)v_n \tag{۲}$$

که حاصل‌ضرب داخلی دو بردار n تایی v و $(\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ است. بردار متشکل از مشتقات پاره‌ای f را گرادیان f در نقطه a می‌نامیم و با $\triangledown f(a)$ یا $grad\ f(a)$ نمایش می‌دهیم:

$$\triangledown f(a) = (\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)) \tag{۳}$$

تفاوت $\triangledown f(a)$ و $Df(a)$ در این است که $\triangledown f(a)$ یک n تایی عضو $\mathbb{R}^n$ تلقی می‌شود و $Df(a)$ یک ماتریس $n \times ۱$. بدین ترتیب وقتی تابع f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$D_v f(a) = \triangledown f(a) \cdot v \tag{۴}$$

∇f در واقع به هر نقطهٔ مشتق‌پذیری تابع f یک بردار n تایی $\nabla f(a)$ نسبت می‌دهد. معمول است که این تابع را به صورت یک "میدان" تجسم می‌کنیم به این معنی که بردار $\nabla f(a)$ را روییده از مبدأ نقطهٔ a در نظر می‌گیریم.

مثال ۱. $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x) = x^۲ - y$ در نظر بگیرید. داریم $\nabla f(x, y) = (۲x, -۱)$. برای رسم میدان گرادیان، به مبدأ هر نقطهٔ (x, y)، بردار $(۲x, -۱)$ را رسم می‌کنیم (شکل ۱).

مثال ۲. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x_۱, \ldots, x_n) = x_۱^۲ + \cdots + x_n^۲$ در نظر بگیرید. داریم $\nabla f(x) = (۲x_۱, \ldots, ۲x_n)$ پس در هر نقطه، برداری به دو برابر بردار حامل از مبدأ به آن و در همان جهت نصب می‌شود (شکل ۲ برای $n = ۲$).

مثال ۳. در مکانیک نیوتنی و دستگاه‌های پایسته، میدان نیرو در هر نقطه برابر گرادیان $(-U)$ است که U انرژی پتانسیل دستگاه است. مثلاً برای گرانش مرکزی در فضای سه بعدی که جسم سنگینی در مبدأ مختصات منشاء گرانش است، انرژی پتانسیل برابر است با $U(x, y, z) = -\frac{k}{r}$ که $k > ۰$ ثابت است و $r = \sqrt{x^۲ + y^۲ + z^۲}$ فاصله از مبدأ می‌باشد. در اینجا میدان نیرو $\vec{F}$ برابر است با $\vec{F}(x, y, z) = -\frac{k}{r^۳}(x, y, z)$.

اکنون نشان خواهیم داد که چگونه میدان گرادیان همراه با مجموعه‌های تراز تصویری بسیار گویا از رفتار یک تابع حقیقی چند متغیری ارائه می‌کند. از (۴) نتیجه می‌گیریم که:

$$D_v f(a) = |\nabla f(a)||v| \cos\measuredangle(\nabla f(a), v) \qquad (۵)$$

وقتی v یک بردار به طول واحد باشد و در نتیجه $D_v f(a)$ مشتق سویی در جهت v، داریم:

$$D_v f(a) = |\nabla f(a)| \cos\measuredangle(\nabla f(a), v) \qquad (٦)$$

از آنجا که $|\cos \measuredangle| \leq ۱$، نتیجه می‌گیریم که:

$$|D_v f(a)| \leq |\bigtriangledown f(a)| \qquad (۷)$$

یعنی قدرمطلق مشتق سویی در یک نقطه حداکثر برابر طول بردار گرادیان در آن نقطه است. در واقع اگر در نقطهٔ a، $\bigtriangledown f(a) \neq ۰$، برای بردار واحد در جهت $\bigtriangledown f(a)$، یعنی $v = \frac{\bigtriangledown f(a)}{|\bigtriangledown f(a)|}$، $\cos \measuredangle(\bigtriangledown f(a), v) = ۱$ متقابلاً برای بردار واحد v در جهت مخالف $\bigtriangledown f(a)$، کسینوس زاویه، (-۱) می‌شود، پس:

(۱−۲۳) گزاره. اگر در نقطهٔ a، $\bigtriangledown f(a) \neq \underline{۰}$، جهت حداکثر افزایش تابع، جهت گرادیان، و جهت حداکثر کاهش تابع، جهت معکوس گرادیان است. □

مثال ۴. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x, y) = x^۲ - y^۲$ را در نظر می‌گیریم که در جلسات قبل نیز با آن آشنایی پیدا کرده‌ایم. می‌خواهیم جهت حداکثر افزایش و کاهش تابع را در نقطهٔ $(۲, ۰)$ پیدا کنیم. داریم $\bigtriangledown f(x, y) = (۲x, -۲y)$، پس $\bigtriangledown f(۲, ۰) = (۴, ۰)$. بردار واحد در جهت گرادیان بردار $(۱, ۰)$ است، که جهت حداکثر افزایش تابع می‌باشد. مشتق سویی در جهت $(۱, ۰)$ یعنی $\frac{\partial f}{\partial x}(۲, ۰)$ که برابر ۴ است. همچنین جهت حداکثر کاهش تابع جهت مقابل $(۱, ۰)$، یعنی جهت $(-۱, ۰)$ است که مشتق سویی نسبت به آن برابر (-۴) می‌شود. روی نمودار تابع (شکل ۳) مشاهده می‌شود که جهت حداکثر افزایش تابع متناظر با صعود روی "یال" زین است و جهت حداکثر کاهش جهت مقابل آن.

می‌توان (۷) را به شکل زیر نوشت:

$$-|\bigtriangledown f(a)| \leq D_v f(a) \leq |\bigtriangledown f(a)| \qquad (۸)$$

بین جهت حداکثر افزایش تابع و جهت حداکثر کاهش تابع، انتظار داریم جهتی موجود باشد که تابع کمترین تغییر را در آن جهت دارد، یعنی $D_v f(a) = ۰$. در واقع وقتی $v \perp \bigtriangledown f(a)$، کسینوس زاویه بین

آنها صفر است و در نتیجه $D_v f(a) = ۰$. نکتهٔ جالب این است که جهت‌های عمود بر گرادیان، در واقع جهت‌های مماس بر مجموعهٔ تراز گذرا از نقطهٔ a هستند:

(۲۳—۲) **گزاره.** اگر در نقطهٔ a داشته باشیم $\nabla f(a) \neq \underline{۰}$، آنگاه ابرصفحه عمود بر $\nabla f(a)$ ابرصفحهٔ مماس بر مجموعهٔ تراز تابع f است که از نقطهٔ a می‌گذرد.

به طور خلاصه گفته می‌شود که گرادیان همواره بر مجموعه‌های تراز عمود است. البته وقتی گرادیان صفر شود، عمود بودن صرفاً به معنای صفر شدن حاصل‌ضرب داخلی گرادیان با بردارهای مماس بر مجموعه تراز (در صورت وجود) است. اثبات دقیق این گزاره را به بعد موکول می‌کنیم ولی کمی توضیح و استدلال شهودی در مورد آن بجاست. سؤال اولی که به ذهن می‌رسد این است که آیا مجموعه‌های تراز مجموعه‌هایی "هموار" هستند به این معنی که در هر نقطه دارای یک "ابرصفحه مماس" هستند؟ بعدها نشان داده خواهد شد که اگر در نقطهٔ a داشته باشیم $\nabla f(a) \neq \underline{۰}$، آنگاه دست‌کم بخش کوچکی از مجموعهٔ تراز گذرا از a که در مجاورت نقطهٔ a قرار دارد 'هموار' است، ولی اگر $\nabla f(a) = \underline{۰}$، آنگاه در نقطهٔ a ممکن است این "هموار بودن" نقض شود یا بعد فضای مماس کوچکتر از $(n - ۱)$ شود (به مثال‌های بعد مراجعه کنید). نقاطی را که در آن $\nabla f(a) = \underline{۰}$ نقاط بحرانی تابع f و نقاطی را که در آن $\nabla f(a) \neq \underline{۰}$، نقاط عادی یا نقاط منظم می‌نامیم. با فرض این مقدمه، می‌توان دلایل شهودی زیر را برای عمود بودن گرادیان بر مجموعهٔ تراز ارائه کرد:

استدلال شهودی ۱. تابع f روی مجموعهٔ تراز ثابت است، بنابراین "مشتق در جهت مجموعه تراز"، یعنی مشتق نسبت به هر جهت مماس بر مجموعهٔ تراز باید صفر باشد.

استدلال شهودی ۲. فرض کنید u یک بردار مماس بر مجموعهٔ تراز در نقطهٔ a باشد و به کسر

$$\frac{f(a+hu)-f(a)}{h} \qquad (۹)$$

توجه کنید که حد آن وقتی h به صفر میل کند برای $D_u f(a)$ است. از نقطهٔ $a + hu$ عمودی بر مجموعهٔ تراز رسم کنید. با توجه به تعریفی که از "مماس" ارائه کردیم انتظار داریم طول پاره‌خط عمود سریعتر از h به صفر میل کند وقتی $h \longrightarrow ۰$. ولی پای عمود روی مجموعهٔ تراز است یعنی مقدار f در آن برابر مقدار f در a است، بنابراین نامعقول نیست که با اثر دادن تابع مشتق‌پذیر f، انتظار داشته باشیم تفاضل $f(a+h) - f(a)$ نیز سریعتر از h به صفر میل کند، یعنی حد کسر (۹) صفر باشد.

با قبول این گزاره، تصویر زیر در مورد رفتار تابع مشتق‌پذیر $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، $S \subset \mathbb{R}^n$، حاصل می‌شود:

گرادیان f همواره بر مجموعه‌های تراز f عمود است و به جهت حداکثر افزایش f اشاره می‌کند.

مثال ۵. تابع $f : \mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y, z) = x^۲ + y^۲ - z^۲$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\nabla f(x, y, z) = (۲x, ۲y, -۲z)$$

به‌ازای $c > ۰$، مجموعهٔ تراز منسوب به c، یعنی $x^۲ + y^۲ - z^۲ = c$ یک هذلولی‌وار یکپارچه است، به‌ازای $c = ۰$ یک مخروط به‌دست می‌آید و به‌ازای $c < ۰$، مجموعهٔ تراز یک هذلولی‌وار دو پارچه است (شکل ۵). جهت گرادیان یعنی بردار $(۲x, ۲y, -۲z)$، خارج از محور z، هموار دور از محور z، به طرف پایین وقتی $z > ۰$ و به طرف بالا وقتی $z < ۰$، می‌باشد.

روی محور z، جهت گرادیان به طرف مبدأ است. تنها نقطهٔ بحرانی $(۰, ۰, ۰)$ است که در آن مجموعهٔ تراز مربوط (مخروط) هموار نیست.

مثال ۶. تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x, y) = (x^۲ - ۱)^۲ + y^۲$ تعریف می‌کنیم. داریم:

$$\nabla f(x, y) = (۴x(x^۲ - ۱), ۲y)$$

سه نقطه بحرانی $(\pm ۱, ۰)$ و $(۰, ۰)$ وجود دارند. نخست مجموعه‌های تراز شامل این نقاط بحرانی را در نظر می‌گیریم. به‌ازای $(\pm ۱, ۰)$ داریم $f(\pm ۱, ۰)$ و در واقع با قرار دادن $(x^۲ - ۱)^۲ + y^۲ = ۰$

فقط این دو نقطه به‌دست می‌آیند. پس مجموعهٔ تراز منسوب به صفر از دو نقطهٔ $(۱,۰)$ و $(-۱,۰)$ تشکیل شده است. می‌بینیم که این مجموعهٔ تراز حالتی استثنایی دارد، یعنی به جای حالت معمول، که مجموعهٔ تراز یک منحنی است، در اینجا از دو نقطهٔ مجزا تشکیل شده است. به‌ازای نقطهٔ بحرانی دیگر، یعنی $(۰,۰)$، $f(۰,۰) = ۱$. مجموعهٔ تراز $(x^۲ - ۱)^۲ + y^۲ = ۱$ را می‌توان با نقطه‌یابی، استفاده از مختصات قطبی، یا ترسیم کامپیوتری به‌دست آورد که یک منحنی پروانه شکل است (شکل ٦). توجه کنید که این مجموعهٔ تراز در نقطهٔ بحرانی $(۰,۰)$ هموار نیست، یعنی دو شاخه منحنی در آن نقطه متقاطع می‌شوند. برای $c < ۰$ مجموعهٔ تراز $(x^۲ - ۱)^۲ + y^۲ = c$ تهی است. برای $۰ < c < ۱$، مجموعهٔ تراز از دو منحنی بستهٔ کوچک در داخل دو شاخهٔ پروانه و حول دو نقطهٔ بحرانی $(\pm۱,۰)$ تشکیل شده است، و بالاخره برای $c > ۱$، مجموعهٔ تراز یک منحنی است که از بیرون پروانه را احاطه می‌کند. میدان گرادیان روی مجموعه‌های تراز ترسیم شده است.

نمودار این تابع را می‌توان به کمک مجموعه‌های تراز بازسازی کرد به این ترتیب که مجموعه تراز منسوب به c را به ارتفاع $z = c$ منتقل می‌کنیم. صفحه $z = ۰$ بر نمودار در دو نقطه $(\pm۱,۰,۰)$ مماس است. برای $c > ۰$ کوچک، $۰ < c < ۱$، صفحه $z = c$ نمودار را در دو منحنی قطع می‌کند، به‌ازای $z = ۱$ شکل پروانه‌ای پدید می‌آید و برای $z > ۱$ مقطع یک منحنی بسته است (شکل ۷).

مثال ۷. تابعهای $f,g,h : \mathbb{R}^۲ \to \mathbb{R}$ در مثال ۹، بخش ۱۷ را در نظر می‌گیریم. داریم

$$
\begin{aligned}
\nabla f(x,y) &= (۱,۱)\\
\nabla g(x,y) &= ۳(x+y)^۲(۱,۱)\\
\nabla h(x,y) &= \tfrac{۱}{۳}(x+y)^{\frac{-۲}{۳}}(۱,۱)
\end{aligned}
$$

گرادیان هر سه تابع بر مجموعه‌های تراز که خطوط راست (ثابت $x+y$) هستند عمودند. توجه کنید که در مورد f میدان گرادیان ثابت است که شدت رشد یکنواخت تابع f را نشان می‌دهد. در مورد g، با دور شدن از $\underline{۰}$، طول بردار گرادیان ∇g سریعتر از ∇f رشد می‌کند که نشانگر افزایش سریعتر $(x+y)^۳$ در

مقایسه با $x + y$ است. ضمناً مجموعه‌های تراز g نیز نسبت به هم نزدیکتر می‌شوند که حاکی از همین امر است. بالعکس در مورد h، ∇h با دور شدن از $\underline{\circ}$ کوچکتر می‌شود و مجموعه‌های تراز نیز از هم فاصله می‌گیرند که نمایانگر رشد کندتر h نسبت به تابع خطی $f(x, y) = x + y$ است.