مشتق و تقریب خطی (۳)

مثالهای بخش پیشین نشان داد که تحقیق مشتق‌پذیری در یک تابع یک نقطه از دامنه ممکن است موضوع ظریفی باشد. خوشبختانه ضابطه‌ای کافی برای مشتق‌پذیری وجود دارد که در بسیاری موارد کارساز و قابل استفاده است. قضیه زیر بیان این ضابطه است:

(۲۴—۱) قضیه. فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^n$، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ طوری باشد که تابع‌های $\frac{\partial f}{\partial x_i} : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ همه در یک گوی باز حول نقطهٔ درونی a از S وجود داشته و در نقطهٔ a پیوسته باشند. در این صورت f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است.

بدین ترتیب برای تحقیق مشتق‌پذیری f کافی است پس از اطمینان از این که مشتق‌های پاره‌ای در نزدیکی a وجود دارند، پیوستگی هر یک را در آن نقطه تحقیق کنیم. اثبات زیر در واقع نشان می‌دهد که پیوستگی $(n - ۱)$ مشتق پاره‌ای در نقطهٔ a و وجود مشتق پاره‌ای باقیمانده در آن نقطه برای مشتق‌پذیری کافی است.

برهان. قضیه را نخست در حالت دو متغیری ثابت می‌کنیم که ایدهٔ اصلی را نشان می‌دهد، سپس روش تعمیم آن به n متغیر را توضیح می‌دهیم. بدین ترتیب فرض کنید $S \subset \mathbb{R}^۲$، (a, b) یک نقطهٔ درونی S است، $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ وجود دارد، و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک گوی باز حول (a, b) وجود دارد و در نقطهٔ (a, b) پیوسته است. برای مشتق‌پذیری f در (a, b) باید ثابت کنیم:

$$\lim_{(h,k)\to(۰,۰)} \frac{f(a+h, b+k) - [f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]}{\sqrt{h^۲ + k^۲}} = ۰ \qquad (۱)$$

چون (a,b) یک نقطهٔ درونی S است، در بالا و در باقیمانده بحث می‌توان فرض کرد که $|h| > \circ$ و $|k| > \circ$ آنقدر کوچک هستند که مستطیل $a - |h| \leq x \leq a + |h|$، $b - |k| \leq y \leq b + |k|$، در دامنهٔ تعریف S قرار دارد. صورت کسر (۱) را با افزودن و کم کردن عبارت $f(a+h,b)$ به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$[f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)] + [f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]$$

بنابراین کافی است دو حد زیر را تحقیق کنیم

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \frac{|f(a+h,b) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)|}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}} = \circ \qquad (۲)$$

$$\lim_{(h,k)\to(\circ,\circ)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}} = \circ \qquad (۳)$$

در مورد (۲) داریم

$$\begin{aligned} |\tfrac{[f(a+h,b)-f(a,b)-h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)]}{\sqrt{h^{۲}+k^{۲}}}| &\leq |\tfrac{f(a+h,b)-f(a,b)-h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}| \\ &= |\tfrac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} - \tfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)| \end{aligned}$$

و اینکه حد عبارت سمت راست صفر است به معنای وجود مشتق $\frac{\partial f}{\partial x}$ در (a,b) است. برای (۳)، از آنجا که $\frac{\partial f}{\partial y}$ در یک گوی حول (a,b) تعریف شده است، با تثبیت h کوچک، $f(a+h,y)$ برای y در نزدیکی b تابعی مشتق‌پذیر نسبت به متغیر دوم است و با استفاده از قضیهٔ میانگین یک متغیری می‌توان نوشت:

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) = k\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b')$$

که در آن b' بین b و $b+k$ است. پس صورت کسر (۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$k[\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)]$$

حال چون $|\frac{k}{\sqrt{h^۲+k^۲}}| \leq ۱$، قدرمطلق کسر (۳) کوچکتر یا مساوی $|\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b') - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|$ است. از آنجاکه b' بین b و $b+k$ است، وقتی $(h,k) \to (۰,۰)$، نقطه $(a+h,b')$ به (a,b) میل می‌کند و چون $\frac{\partial f}{\partial y}$ در (a,b) پیوسته فرض شده است، این عبارت به صفر میل می‌کند و اثبات حکم کامل می‌شود.

برای اثبات حکم در حالت n متغیری، روش بالا را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. فرض کنید نقطهٔ درونی $a = (a_۱,\ldots,a_n)$ از مجموعهٔ S داده شده است و نقطهٔ $(a_۱+h_۱,\ldots,a_n+h_n)$ در دامنهٔ f طوری است که مستطیل $a_۱ - |h_۱| \leq x_۱ \leq a_۱ + |h_۱|$، ...، $a_n - |h_n| \leq x_n \leq a_n + |h_n|$ به تمامی در دامنهٔ تعریف f قرار می‌گیرد. حال با تفریق و افزودن $(n-۱)$ مقدار $f(a_۱+h_۱,\ldots,a_{n-۱}+h_{n-۱},a_n)$، $f(a_۱+h_۱,\ldots,a_{n-۲}+h_{n-۲},a_{n-۱},a_n)$، ...، $f(a_۱+h_۱,a_۲,\ldots,a_n)$، عبارت $f(a_۱+h_۱,\ldots,a_n+h_n) - f(a_۱,\ldots,a_n) - \sum_{i=۱}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ را به صورت مجموع n عبارت زیر می‌نویسیم:

$$[f(a_۱+h_۱,\ldots,a_n+h_n) - f(a_۱+h_۱,\ldots,a_{n-۱}+h_{n-۱},a_n) - h_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)] + \cdots +$$

$$[f(a_۱+h_۱,a_۲,\ldots,a_n) - f(a_۱,\ldots,a_{n-۱},a_n) - h_۱\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a)]$$

و نشان می‌دهیم نسبت تقسیم قدرمطلق هر کروشه بر $\sqrt{h_۱^۲+\cdots+h_n^۲}$ به صفر میل می‌کند. برای کروشهٔ آخر، این امر از وجود $\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a)$ نتیجه می‌شود و برای سایر کروشه‌ها مثل استدلال بالا از قضیهٔ میانگین و پیوستگی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ در نقطهٔ a استفاده می‌کنیم. استدلال عین بالا است. □

مثال. به مثالی که در هر یک از دو بخش قبل مورد بحث قرار گرفت باز می‌گردیم، یعنی تابع $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطهٔ:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y}{x^۲+y^۲} & (x,y) \neq (۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

دیدیم که این تابع در $(۰,۰)$ مشتق‌پذیر نیست. و در عین حال $\dfrac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)$ و $\dfrac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$ وجود دارند. بنابراین طبق قضیه هیچ‌یک از $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ نمی‌توانند در $(۰,۰)$ پیوسته باشند. ضمناً برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ در دو

بخش قبل عبارت زیر را به‌دست آوردیم:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\frac{x^۴-x^۲y^۲}{(x^۲+y^۲)^۲} & (x,y)\neq(۰,۰)\\ ۰ & (x,y)=(۰,۰)\end{cases}$$

در مختصات قطبی خارج از $(۰,۰)$ داریم $\frac{\partial f}{\partial y}=\cos^۲\theta(\cos^۲\theta-\sin^۲\theta)$. روی محور x، $\theta=۰,\pi$، و $\frac{\partial f}{\partial x}(x,۰)=۱$ برقرار است. بنابراین حدّ $\frac{\partial f}{\partial y}$ وقتی $(x,y)\to(۰,۰)$ برابر $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)=۰$ نیست، و $\frac{\partial f}{\partial y}$ در $(۰,۰)$ پیوسته نیست. مشابهاً با محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x}$ در نقاط خارج از مبدأ می‌توان مشاهده کرد که $\frac{\partial f}{\partial x}$ نیز در $(۰,۰)$ پیوسته نیست.

اکنون به جنبه‌های کاربردی‌تر تقریب خطی می‌پردازیم. همان طور که دیدیم در بین تابع‌های درجه یک که نمودارشان از یک نقطهٔ خاص نمودار تابع داده شده می‌گذرد، تقریب خطی یگانه تابعی است که تفاضل مقدارش با مقدار متناظر تابع داده شده سریعتر از فاصلهٔ متغیر از نقطهٔ مورد بحث به صفر میل می‌کند. این ویژگی باید روش تقریب مناسبی را پیش پای ما بگذرد زیرا که از یک سو تقریب خوبی مطرح است و از سویی دیگر محاسبهٔ تابع‌های درجه یک بسیار ساده است.

مثال ۱. به کمک روش تقریب خطی، مقداری تقریبی برای $\sqrt[۳]{x^۲-y}$ پیدا کنید وقتی $x=۲/۹$ و $y=۱/۱$. ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $a=۳$ و $b=۱$، داریم $\sqrt[۳]{a^۲-b}=۲$ و نقطهٔ $(x,y)=(۲/۹,۱/۱)$ را می‌توان برای بعضی مقاصد نزدیک نقطه (a,b) فرض کرد. تابع $f(x,y)=\sqrt[۳]{x^۲-y}$ را در نظر می‌گیریم. مشتق‌های پاره‌ای این تابع نسبت به x و y وجود دارند و پیوسته‌اند وقتی زیر $\sqrt[۳]{}$ صفر شود، یعنی وقتی $y\neq x^۲$. نقطه $(۳,۱)$ روی $y=x^۲$ نیست، پس در یک گوی باز حول آن (که شامل $(۲/۹,۱/۱)$ نیز می‌شود) مشتق‌های پاره‌ای وجود دارند. در واقع

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{۲x}{۳}(x^۲-y)^{-\frac{۲}{۳}}\quad,\quad\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{۱}{۳}(x^۲-y)^{-\frac{۲}{۳}}$$

تقریب خطی f را در نقطهٔ $(a,b) = (۳,۱)$ می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} A(x,y) &= ۲ + \frac{\partial f}{\partial x}(۳,۱)(x-۳) + \frac{\partial f}{\partial y}(۳,۱)(y-۱) \\ A(۲/۹, ۱/۱) &= ۲ + \tfrac{۱}{۲}(-۰/۱) + (\tfrac{-۱}{۱۲})(۰/۱) \\ &= ۲ - \tfrac{۱}{۲۰} - \tfrac{۱}{۱۲۰} \end{aligned}$$

پس طبق تقریب خطی:

$$\sqrt[۳]{(۲/۹)^۲ - (۱/۱)} \simeq ۲ - \frac{۱}{۲۰} - \frac{۱}{۱۲۰} \simeq ۱/۹۴۱۶۶۷$$

در اینجا روش دیگری برای استفاده از تقریب خطی به نظر می‌رسد. داریم $\sqrt[۳]{۷/۳۱} = \sqrt[۳]{(۲/۹)^۲ - (۱/۱)}$. می‌توان این مسأله را به صورت تقریب خطی یک متغیری مطرح کرد. تابع $f(t) = \sqrt[۳]{t}$ در نظر بگیرید. داریم $f(۸) = ۲$ و می‌خواهیم مقداری تقریبی برای $f(۷/۳۱) = f(۸ - ۰/۶۹)$ پیدا کنیم. طبق تقریب خطی یک متغیری:

$$f(۷/۳۱) \simeq f(۸) - (۰/۶۹) f'(۸)$$

حال $f'(t) = \frac{۱}{۳} t^{-\frac{۲}{۳}}$، پس $f'(۸) = \frac{۱}{۱۲}$ و

$$f(۷/۳۱) \simeq ۲ - \frac{۶۹}{۱۲۰۰} = ۱/۹۴۲۵$$

کدامیک از دو تقریب به واقعیت نزدیکتر است؟ تابع دو متغیری $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۲ - y}$ را در نظر بگیرید. ترکیب‌های مختلفی از x و y منجر به $\sqrt[۳]{۷/۳۱}$ می‌شوند. در واقع با قرار دادن $x^۲ - y = ۷/۳۱$ یک سهمی در صفحه xy به دست می‌آید که جزیی از آن "نزدیک" نقطهٔ $(۳,۱)$

شکل ۱

است. بخشی از نمودار $f(x,y) = \sqrt[۳]{x^۲ - y}$ را که بالای سر این منحنی قرار دارد در نظر بگیرید که یک منحنی روی نمودار می‌شود. نقاط مختلف این منحنی از تقریب خطی در نقطهٔ $(۳,۱)$ فواصل

گوناگون دارند، یعنی تقریب خطی در (۳,۱) جوابی یکسان برای همهٔ این نقاط نمی‌دهد، که امری طبیعی است. برای هر چنین (x,y)، دو مقدار $(3-x)$ و $(1-y)$ بر تقریب خطی به‌دست آمده اثر دارند. در تقریب خطی یک متغیری، همه این نقاط به صورت یک نقطه روی محور t دیده می‌شوند و تقریبی که به‌دست می‌آید نسبت به پستی بلندی‌های نمودار $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2-y}$ حساس نیست. جمعبندی بحث بالا این است که اگر مسأله اولیه به طور طبیعی یک مسأله دو متغیری باشد، بهتر است تقریب خطی دو متغیری در نظر گرفته شود که تمایز میان نقاط مختلفی که منجر به یک مسأله یک متغیری می‌شوند نادیده گرفته نشود. بالعکس اگر یک مسأله یک متغیری را به روش‌های گوناگون به مسأله‌ای دو متغیری مبدل کنیم، جواب‌های گوناگونی حاصل خواهند شد که هر یک ممکن است وابسته به فرض‌های اضافی و بعضاً غیرطبیعی باشد. در مثال ۱ که مسأله به صورت دو متغیری مطرح بود، روش طبیعی، استفاده از تقریب خطی دو متغیری است.

مثال ۲. $S\subset\mathbb{R}^n$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$S=\{(x_1,\dots,x_n)\mid x_i>0, i=1,\dots,n\}$$

و تابع $f:S\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x_1,\dots,x_n)=cx_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n} \qquad (4)$$

که در آن $c,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ اعداد حقیقی مثبت داده شده‌اند. این گونه تابع در بعضی مسائل اقتصادی مطرح می‌شود که در آن x_i ها مقادیر عوامل مختلف تولید هستند ولی منحصر به این نوع کاربرد نیستند. سؤالی که مطرح می‌کنیم این است که اگر عوامل $x_1,\dots,x_n$ به ترتیب با دقت نسبی $r_1,\dots,r_n$ درصد معلوم باشند، نتیجه محاسبه، یعنی $f(x_1,\dots,x_n)$ با چه دقت نسبی تعیین می‌شود؟ اگر $a_1,\dots,a_n$ "مقادیر واقعی" متغیرهای $x_1,\dots,x_n$ باشند، خطاهای نسبی به ترتیب

$\frac{x_1-a_1}{a_1}, \dots, \frac{x_n-a_n}{a_n}$ هستند. $x_i - a_i$ را به Δx_i نیز نمایش می‌دهیم. طبق فرمول تقریب خطی داریم:

$$f(x_1, \dots, x_n) \simeq f(a_1, \dots, a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(a) \Delta x_i \tag{5}$$

با مشتق‌گیری از (۱) داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = c\alpha_i x^{\alpha_1} \dots x_{i-1}^{\alpha_{i-1}} x_i^{\alpha_i - 1} x_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots x_n^{\alpha_n} = \frac{\alpha_i}{x_i} f(x)$$

بنابراین با جایگزینی در (۲):

$$\Delta f = f(x) - f(a) \simeq f(x) \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i$$

در نتیجه خطای نسبی f، یعنی $\frac{\Delta f}{f}$، از تقریب خطی به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta f}{f} \simeq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

حال اگر خطای نسبی x_i برابر r_i درصد باشد، نتیجه می‌شود که خطای نسبی در محاسبه f حدوداً $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i r_i$ درصد خواهد بود.