مشتق و تقریب خطی (۲)

در بخش گذشته مفهوم مشتق به عنوان آهنگ تغییر لحظه‌ای را تعمیم دادیم و به مفهوم مشتق سویی دست یافتیم. اکنون می‌خواهیم تعبیر دیگر مشتق، به عنوان خط مماس یا تقریب خطی، را برای تابع‌های $f : S \to \mathbb{R}^m$ پیاده کنیم. طبیعی است که به جای "خط" باید شیء مسطح با بعد مناسب مطرح شود. در واقع کوشش می‌کنیم تعریف مماس در حالات یک متغیری را عیناً تعمیم دهیم.

فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ و $g : T \longrightarrow \mathbb{R}^m$ دو تابع باشند که به ترتیب روی دامنه‌های S و T، زیر مجموعه‌هایی از $\mathbb{R}^n$، تعریف شده‌اند، و a یک نقطهٔ درونی هر دو مجموعهٔ S و T است. در این صورت می‌گوییم f در نقطهٔ a بر g مماس است در صورتی که:

$$f(a) = g(a) \tag{۱}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - g(x)|}{|x - a|} = 0 \tag{۲}$$

برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ داده شده، f را مشتق‌پذیر در نقطه a می‌نامیم در صورتی که تابعی مستوی $A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ وجود داشته باشد که f در نقطهٔ a بر A مماس باشد، یعنی:

$$f(a) = A(a) \tag{۳}$$

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - A(x)|}{|x - a|} = 0 \qquad (۴)$$

در این صورت A، تقریب خطی f در نقطهٔ a خوانده می‌شود (اصطلاح "تقریب مستوی" دقیق‌تر است ولی "تقریب خطی" بسیار رایج‌تر). این تعریف را کمی می‌شکافیم. هر تابع مستوی A به شکل زیر است

$$A(x) = L(x) + B \qquad (۵)$$

که در آن $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع خطی است و B یک m تایی ثابت در $\mathbb{R}^m$. از (۳) داریم:

$$B = f(a) - L(a) \qquad (۶)$$

پس $A(x) = L(x) + f(a) - L(a)$، یا:

$$A(x) = f(a) + L(x - a) \qquad (۷)$$

زیرا که L خطی است. با جایگزینی در (۴) داریم:

$$\lim_{x \to a} \frac{|f(x) - [f(a) + L(x - a)]|}{|x - a|} = 0 \qquad (۸)$$

اگر $x - a$ را به $\vec{h}$ نمایش دهیم، (۸) را می‌توان به صورت معادل زیر نیز نوشت:

$$\lim_{\vec{h} \to \underline{0}} \frac{|f(a + \vec{h}) - f(a) - L(\vec{h})|}{|\vec{h}|} = 0 \qquad (۹)$$

البته تابع خطی $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ را معمولاً به صورت یک ماتریس $m \times n$، مانند M، می‌نویسیم. بنابراین تقریب خطی، A، شکل زیر را دارد:

$$|A(x)\rangle = M|x\rangle + |B\rangle \qquad (۱۰)$$

که شباهت آن با $A(x)=mx+b$ واضح است. تابع خطی L (یا معادلاً ماتریس $m\times n$، M) را، در صورت مشتق‌پذیری f در a، مشتق (یا دیفرانسیل) f در نقطهٔ a می‌نامند و به $Df(a)$ نمایش می‌دهند.

(۱ــ۲۱) محاسبهٔ مشتق. اکنون نشان می‌دهیم که ماتریس مربوط به $Df(a)$ را می‌توان به سادگی محاسبه کرد. اگر M ماتریس تابع خطی $Df(a)$ باشد، می‌دانیم که ستون jــ ام آن از مؤلفه‌های $(Df(a))(e_j)$ تشکیل شده است. اگر در کسر (۹) به جای L، $Df(a)$ و به جای $\vec{h}$، he_j را جایگزین کنیم (که $h\in\mathbb{R}$)، نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}\frac{f(a+he_j)-f(a)-(Df(a))(he_j)}{|he_j|} &= \frac{|f(a+he_j)-f(a)-h(Df(a))(e_j)|}{|h|}\\ &= |\tfrac{f(a+he_j)-f(a)}{h}-(Df(a))(e_j)|\end{aligned}$$

بنابراین اگر f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)=(Df(a))(e_j) \qquad (۱۱)$$

بدین ترتیب اگر f در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، ستون jــ ام ماتریس $Df(a)$، از مشتق‌های پاره‌ای مؤلفه‌های f تشکیل شده، پس $Df(a)$ نمایش ماتریسی زیر را دارد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{bmatrix} \qquad (۱۲)$$

گاهی اصطلاح ماتریس ژاکوبی نیز برای این ماتریس به‌کار می‌رود.

مثال ۱. برای تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$، $f(x,y)=x^2-y^2$، با فرض مشتق‌پذیری f در نقطهٔ $(2,1)$، معادلهٔ صفحهٔ مماس بر نمودار را در نقطهٔ $(2,1,3)$ پیدا کنید. در اینجا $Df(2,1)$ به وسیلهٔ ماتریس 1×2 زیر داده می‌شود

$$[\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)]=[4 \quad -2]$$

بنابراین طبق (۷):

$$A(x,y) = ۳ + ۴(x - ۲) - ۲(y - ۱)$$

که اگر بنویسیم $z = A(x,y)$، معادلهٔ صفحهٔ مماس در فضای x,y,z عبارت است از:

$$۴x - ۲y - z - ۳ = ۰$$

مثال ۲. فرض کنید S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$، $a = (a_۱, \ldots, a_n)$ یک نقطهٔ درونی S و $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد. معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس بر نمودار f را در نقطهٔ $(a_۱, \ldots, a_n, f(a))$ محاسبه کنید. نقاط دامنه را به $x = (x_۱, \ldots, x_n)$ و مقدار تابع را به $x_{n+۱} = f(x_۱, \ldots, x_n)$ نمایش می‌دهیم. $Df(a)$ نمایش ماتریسی زیر را به عنوان یک ماتریس $n \times ۱$ دارد:

$$[\frac{\partial f}{\partial x_۱}(a) \ \cdots \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)]$$

بنابراین طبق (۷)، معادلهٔ ابرصفحهٔ مماس، یا عبارت تقریب خطی، عبارت است از:

$$x_{n+۱} = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_۱}(a)(x_۱ - a_۱) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \qquad (۱۳)$$

شباهت این عبارت به معادلهٔ خط مماس برای تابع‌های $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، یعنی $y = f(a) + f'(a)(x - a)$، مشهود است.

در اینجا می‌توانیم رابطهٔ مشتق‌پذیری، مشتق، و مشتق‌های سویی را تشریح کنیم. فرض کنید $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ در نقطهٔ درونی a از S مشتق‌پذیر باشد. با محاسبه‌ای مشابه آنچه به یافتن درایه‌های ماتریس ژاکوبی منجر شد، رابطهٔ $Df(a)$ و مشتق سویی را به‌دست می‌آوریم. فرض کنید v یک عضو ناصفر $\mathbb{R}^n$ باشد. اگر در کسر (۹)، به جای $\vec{h}$ مقدار hv را جایگزین کنیم، $h \in \mathbb{R}$، و به جای L بنویسیم

$Df(a)$، داریم:

$$\begin{aligned}\frac{|f(a+hv)-f(a)-Df(a)(hv)|}{|hv|} &= \frac{1}{|v|}\frac{|f(a+hv)-f(a)-h(Df(a))(v)|}{|h|} \\ &= \frac{1}{|v|}\left|\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}-(Df(a))(v)\right|\end{aligned}$$

طبق فرض مشتق‌پذیری f در a، عبارت بالا دارای حد صفر است، ولی حد عبارت اول داخل $|\ |$ در فوق همان مشتق نسبت به v، یعنی $D_vf(a)$، است. ضمناً برای $v=\underline{0}$ نیز تساوی $D_vf(a)=Df(a)(v)$ برقرار است زیرا دوطرف رابطه صفر هستند. بنابراین:

(۲۱–۲) گزاره. اگر f در a مشتق‌پذیر باشد برای هر $v\in\mathbb{R}^n$ داریم

$$D_vf(a)=(Df(a))(v) \qquad (۱۴)$$

■

بالاخص این نتیجه مهم نشان می‌دهد که اگر تابع در a مشتق‌پذیر باشد، میان مشتق‌های جهت‌دار در جهت‌های گوناگون رابطه‌ای وجود دارد زیرا که همه آنها با دانستن مشتق‌های پاره‌ای (درایه‌های $Df(a)$) و دانستن جهت، یعنی u، قابل محاسبه‌اند. از نظر هندسی نیز باید همین را انتظار داشت زیرا که در صورت مشتق‌پذیری، خطوط مماس در جهات مختلف همه در یک شیء مسطح، یعنی نمودار تابع مستوی مماس باشد، قرار می‌گیرند. که همهٔ خطوط مماس در یک زیرفضای مستوی قرار می‌گیرند برای تابعهایی که مشتق‌پذیر نباشند ممکن است برقرار نباشد. مثال زیر نمونهٔ ساده‌ای از چنین وضعیتی است.

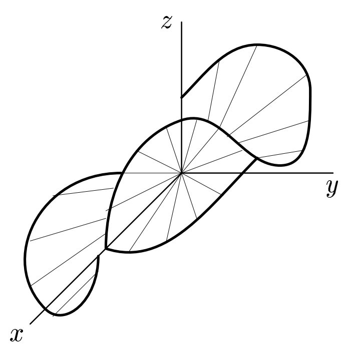
مثال. تابع $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

نشان می‌دهیم f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نیست. عبارت $\frac{x^{2}y}{x^{2}+y^{2}}$ در مختصات قطبی تبدیل می‌شود به $r\cos^{2}\theta\sin\theta$. مقدار این عبارت در مبدأ مختصات، یعنی $r=\circ$، صفر است، پس به طور کلی

$$f(x,y)=r\cos^{2}\theta\sin\theta$$

اگر دامنهٔ f را به یک خط راست گذرا از مبدأ محدود کنیم، نمودار یک خط راست است زیرا که برای نیم‌خط تعریف شده توسط θ ثابت داریم $z=(\cos^{2}\theta\sin\theta)r$، یعنی z تابعی خطی نسبت به r (فاصله از $\underline{\circ}$) است، و برای نیم‌خط مقابل (یعنی به‌ازای $\theta+\pi$)، $\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$، پس در واقع $z=(\cos^{2}\theta\sin\theta)r$ یک خط راست بالا سر خط $\{\theta,\theta+\pi\}$ تعریف می‌کند. به‌ازای $\theta=\circ,\pi$ و نیز به‌ازای $\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$، داریم $f(x,y)=\circ$، یعنی محورهای x و y جزء نمودار تابع f هستند. بنابراین اگر f در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر می‌بود، می‌بایست دو محور x و y جزء صفحهٔ مماس باشند و در نتیجه صفحه مماس می‌بایست همان صفحه xy باشد. ولی به‌ازای مقادیر θ غیر از مقادیر مربوط به دو محور، داریم $(\cos^{2}\theta)(\sin\theta)\neq\circ$ و خط راست $z=(\cos^{2}\theta\sin\theta)r$ با صفحهٔ xy در $\underline{\circ}$ برخورد غیر مماس دارد. این نکته نشان می‌دهد که تنها نامزد ممکن صفحهٔ مماس برای نمودار f در $(\circ,\circ)$ در واقع بر همهٔ نمودار مماس نیست، یعنی تابع در $(\circ,\circ)$ مشتق‌پذیر نیست (شکل ۱)!



شکل ۱

ضمناً توجه کنید که در $(\circ,\circ)$، f دارای مشتق سویی در همه جهتهاست زیرا با قرار دادن

$u = (\cos\theta, \sin\theta)$، داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{0}+hu)-f(\underline{0})}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{h^3\cos^2\theta\sin\theta}{h^3} \\ &= \cos^2\theta\sin\theta\end{aligned}$$

اکنون مشتق‌ناپذیری f در $(0,0)$ را به طور دقیق‌تر با توجه به تعاریف و نتایج به‌دست آمده توضیح می‌دهیم. فرض کنید f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت ماتریس $Df(a)$ هست $[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)]$. با توجه به این که f روی هر دو محور مقدار ثابت صفر را داراست، نتیجه می‌شود که $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. بنابراین با توجه به این که $f(0,0) = 0$، صفحهٔ مماس در $(0,0)$ باید $z = 0$ باشد. حال اگر تابع در $(0,0)$ مشتق‌پذیر می‌بود، طبق (۹) با قراردادن $a = (0,0)$ و $\vec{h} = (x,y)$، باید می‌داشتیم:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|\frac{x^2y}{x^2+y^2}|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

یا در مختصات قطبی:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (\cos^2\theta|\sin\theta|) = 0$$

چون $\cos^2\theta|\sin\theta|$ روی هر خط گذرا از مبدأ مقدار ثابتی دارد و این مقدار ثابت غیر از روی دو محور صفر نیست، حد بالا نمی‌تواند برقرار باشد.

این نکته را باید تأکید کرد که علیرغم وجود $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ و در واقع همهٔ مشتقهای سویی در $(0,0)$، تابع در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست. مطالب این جلسه نشان دادند اگر تابع در نقطهٔ a مشتق‌پذیر باشد، مشتق‌های پاره‌ای، و در واقع مشتق‌های سویی، همه در نقطهٔ a وجود دارند و رابطهٔ کلی (۱۴) برقرار است. ولی وجود مشتق‌های پاره‌ای (و حتی وجود همهٔ مشتق‌های سویی)، بر مشتق‌پذیری دلالت نمی‌کند. در مثال فوق خطوط مماس در جهات مختلف در یک زیرفضای مسطح واحد قرار نگرفتند، یعنی یک تقریب خطی در برگیرندهٔ همهٔ جهات وجود نداشت.

در مثالی که در زیر می‌آید، با اینکه خطوط مماس در همهٔ جهتها در یک صفحه قرار می‌گیرند، این صفحه بر نمودار مماس نخواهد بود! در واقع در مثال زیر تابع داده شده در نقطه مزبور حتی پیوسته نیست در حالیکه مشتقهای سویی تابع در آن نقطه در همه جهات موجود است.

مثال ۴. خم C در صفحه را که در مختصات قطبی به‌صورت زیر تعریف شده است در نظر بگیرید:

$$r = 2\pi - \theta, \quad 0 \leq \theta < 2\pi$$

تصویر C در شکل ۲ نمایش داده شده است. توجه کنید که C هر خط راست گذرا از $\underline{0}$ را

شکل ۲

در دقیقاً دو نقطه قطع می‌کند. حال تابع $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } (x,y) \text{ روی } C \text{ نباشد} \\ 1 & \text{اگر } (x,y) \text{ روی } C \text{ باشد} \end{cases}$$

تحدید این تابع به هر خط گذرا از مبدأ در همه‌جا به استثنای دو نقطه غیر $\underline{0}$ صفر است، پس مشتق سویی تابع در $\underline{0}$ در همه‌جهتها وجود دارد و برابر صفر است. بدین ترتیب خطوط مماس در $\underline{0}$ در همهٔ جهتها افقی هستند و روی صفحه xy قرار می‌گیرند. ولی این تابع در $(0,0)$ پیوسته نیست زیرا اگر به $(0,0)$ در طول C نزدیک شویم مقدار f به ۱ میل می‌کند و اگر از بیرون C نزدیک شویم مقدار f به 0 میل می‌کند. این تابع در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست زیرا طبق گزارهٔ زیر اگر f در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، در آن نقطه پیوسته نیز هست.

(۲۱—۳) گزاره. اگر f در a مشتق‌پذیر باشد، f در a پیوسته است.

برهان. طبق تعریف مشتق‌پذیری داریم

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to \circ} \frac{|f(a+\overrightarrow{h})-f(a)-Df(a)(\overrightarrow{h})|}{|\overrightarrow{h}|}=\circ$$

پس حد صورت زیر صفر است

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to \circ} |f(a+\overrightarrow{h})-f(a)-Df(a)(\overrightarrow{h})|=\circ$$

چون $Df(a)$ یک تابع خطی است، $Df(a)$ پیوسته است و مقدار تابع خطی در $\overrightarrow{h}=\underline{\circ}$ برابر صفر است، پس داریم:

$$\lim_{\overrightarrow{h}\to \circ} |f(a+\overrightarrow{h})-f(a)|=\circ$$

که این در واقع بیان پیوستگی f در نقطهٔ a است. ■