مشتق و تقریب خطی (۱)

در بررسی توابع حقیقی یک متغیری دیدیم که دو انگیزه متفاوت، یکی صورتبندی مفهوم آهنگ تغییرات، و دیگری یافتن مماس و تقریب خطی برای تابعهای غیرخطی، منجر به پیدایش مفهوم مشتق شدند. در اینجا قصد داریم همین بحثها را برای تابعهای چندمتغیری مطرح کنیم. خواهیم دید که دو رهیافت ذکر شده در اینجا منجر به تعاریف متمایز ولی مرتبط می‌شوند.

در آنچه خواهد آمد، S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^n$ است، $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$ یک تابع و a یک نقطهٔ درونی S است. اگر بخواهیم برای آهنگ تغییر f در نقطهٔ a عبارتی مشابه عبارت مربوط به مشتق تابع یک متغیری در نظر بگیریم، باید مفهوم $\lim_{h\to \circ} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ را تعمیم دهیم. با توجه به این که $a \in S$ یک n تایی است، "تغییر کوچک" در a، یعنی h، نیز باید عنصری از $\mathbb{R}^n$ در نظر گرفته شود (a ممکن است در هر جهتی از نقطهٔ a در $\mathbb{R}^n$ تغییر کند). اشکال واضحی که در اینجا پدید می‌آید این است که مخرج کسر بالا به یک nـ تایی تبدیل می‌شود ولی مفهوم "تقسیم بر یک بردار" تعریف نشده است. اگر چنین عمل تقسیمی تعریف شدنی بود، خارج قسمت تقسیم یک mـ تایی بر یک nـ تایی چگونه موجودی می‌بایست باشد؟ در بخش بعد خواهیم دید که جواب این سؤال به اعتباری یک ماتریس $m \times n$ است. توجه کنید که اگر mـ تایی‌ها و nـ تایی‌ها را به صورت ستون بنویسیم، حاصل‌ضرب یک ماتریس $m \times n$ در یک ستون n تایی یک ستون m تایی است، بنابراین دور از ذهن نیست که "نسبت" یک m تایی به یک n تایی از "جنس" ماتریس $m \times n$ باشد. ولی در ابتدا هدف محدودتری را مد نظر قرار

خواهیم داد. نمودار یک تابع با مقدار حقیقی، مثلاً تابعی $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. با توجه به خمیدگی‌های ممکن برای این نمودار در جهت‌های مختلف باید انتظار داشت که به‌ازای هر جهت ساطع از نقطهٔ a، بتوان عددی نسبت داد که آهنگ تغییر f در آن جهت را بیان کند.

"جهت‌های" مختلف در $\mathbb{R}^n$ به وسیلهٔ n تایی‌های به طول واحد مشخص می‌شوند. از آنجا که برای هر n تایی ناصفر v می‌توان نوشت $v = |v|\frac{v}{|v|}$؛ با قرار دادن $u_v = \frac{v}{|v|}$ یک n تایی به طول واحد به‌دست می آید و داریم $v = |v|u_v$، یعنی هر n تایی v با یک طول $|v|$ و یک 'جهت' u_v مشخص می‌شود.

اکنون برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، a یک نقطهٔ درونی S، و n تایی واحد u در $\mathbb{R}^n$، مشتق سویی یا مشتق جهتدار تابع f در نقطهٔ a در جهت u را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

$$D_u f(a) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(a + hu) - f(a)}{h} \tag{۱}$$

که در اینجا $h \in \mathbb{R}$. حد فوق ممکن است وجود داشته باشد یا نباشد. کمی توضیح در مورد این تعریف لازم است. در اینجا نیز مانند حالت یک متغیری نسبت تغییر تابع به تغییر متغیر را در نظر گرفته حد آن را وقتی تغییر متغیر به صفر میل کند مورد نظر قرار داده‌ایم. ولی توجه کنید که بررسی تغییرات متغیر به امتداد خط راست گذرا از a به موازات u محدود شده است. برای تابع‌های $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$، یعنی برای $m = ۱$، می‌توان یک تعبیر هندسی مشابه حالت یک متغیری ارائه کرد. مثلاً در شکل ۱ تابعی $\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ در نظر گرفته شده

است، $z = f(x, y)$. خط گذرا از a به موازات u را l می‌نامیم. $f(a + hu)$ فقط شامل مقادیر f روی این خط است. حال صفحهٔ π را در نظر بگیرید که شامل خط l و عمود بر صفحهٔ xy است. این صفحه نمودار را در یک منحنی قطع می‌کند که نمودار تحدید دامنه f به خط l است. در شکل (ب) صفحهٔ π و بخشی از نمودار را که بالای سر آن قرار دارد رسم کرده‌ایم. اگر برای l جهت مثبت را جهت u و برای امتداد عمود بر آن جهت مثبت را موازی جهت مثبت محور z منظور کنیم می‌توان در صفحهٔ

π، عیناً مانند صفحهٔ دکارتی xy، شیب خطوط راست مماس بر نمودار تابع‌های یک متغیری را مطرح نمود. در وضعیت موجود، $D_u f(a)$ دقیقاً ضریب زاویهٔ خط مماس بر منحنی تقاطع π با نمودار f در صفحهٔ π است.

ذکر این نکته لازم است که برای $f : S \longrightarrow \mathbb{R}^m$، $S \subset \mathbb{R}^n$، کسر $\frac{f(a+hu)-f(a)}{h}$ عنصری از $\mathbb{R}^m$ است، پس حد آن نیز، در صورت وجود، عنصری از $\mathbb{R}^m$ خواهد بود. ضمناً چون حد یک mتایی مؤلفه به مؤلفه منظور می‌شود، اگر $f = (f_۱, \ldots, f_m)$، آنگاه:

$$D_u f(a) = (D_u f_۱(a), \ldots, D_u f_m(a)) \qquad (۲)$$

مثال ۱. $f : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $f(x,y) = x^۲ - y^۲$ تعریف می‌کنیم. در نقطهٔ $a = (۱, ۰)$، مشتق جهتدار f را در جهت‌های گوناگون بررسی می‌کنیم.

هر عنصر با طول یک از $\mathbb{R}^۲$ را می‌توان به صورت $u = (\cos\theta, \sin\theta)$ نوشت که در آن θ مختصهٔ قطبی در $\mathbb{R}^۲$ است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+hu)-f(a)}{h} &= \frac{f(۱+h\cos\theta, h\sin\theta) - f(۱,۰)}{h} \qquad h \neq ۰ \\ &= \frac{(۱+h\cos\theta)^۲ - h^۲\sin^۲\theta - ۱}{h} \\ &= ۲\cos\theta + h(\cos^۲\theta - \sin^۲\theta) \end{aligned}$$

بنابراین

$$D_u f(۱, ۰) = ۲\cos\theta$$

چند θ نمونه را در نظر می‌گیریم و تعبیر هندسی مشتق سویی را روی نمودار (شکل ۲) بررسی می‌کنیم. نخست برای $\theta = ۰$ خط موازی محور x گذرا از $(۱, ۰)$ را در نظر می‌گیریم. مقطع صفحهٔ قائمی از این خط می‌گذرد و بر صفحه xy عمود است یک سهمی است ($z = x^۲$) که در شکل ۲ (الف) نمایش

داده شده است ضریب زاویهٔ مماس برابر $2 = 0\ \cos 2$ می‌باشد. برای $\theta = \frac{\pi}{4}$، اگر دامنهٔ نمودار f را به خط گذرا از $(1, 0)$ با ضریب زاویه $\frac{\pi}{4}$ محدود کنیم حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} z &= f((1,0) + h(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})) \\ &= (1 + \frac{h}{\sqrt{2}})^2 - (\frac{h}{\sqrt{2}})^2 \\ &= 1 + \sqrt{2}h \end{aligned}$$

چون عبارت سمت راست نسبت به h درجهٔ یک است مقطع با نمودار یک خط راست می‌باشد، شکل ۲ (ب) که ضریب زاویهٔ آن $\sqrt{2} = \frac{\pi}{4}\cos 2$ است. بالاخره با محدود کردن دامنهٔ نمودار f به خط قائم گذرا از $(1, 0)$، داریم:

$$\begin{aligned} z &= f((1,0) + h(0,1)) \\ &= f(1,h) \\ &= 1 - h^2 \end{aligned}$$

که یک سهمی به‌دست می‌دهد، شکل ۲ (ج)، و ضریب زاویهٔ مماس $0 = \frac{\pi}{2}\cos 2$ است. بدین ترتیب ملاحظه می‌کنیم که مشتق سویی در جهت‌های مختلف مقادیر مختلف دارد. قابل ذکر است که اگر جهت معکوس شود (یا به اندازه π به θ افزوده شود) مقدار مشتق جهتدار در (-1) ضرب می‌شود. دلیل این است که با جایگزینی $-u$ به جای u، جهت محور افقی که جهت افزایش h است معکوس می‌شود. اگر یک تابع مشتق‌پذیر یک متغیری در یک جهت افزایش یابد، در جهت معکوس به همان آهنگ کاهش می‌یابد.

در یک مورد خاص، نماد ویژه‌ای برای مشتق جهتدار وجود دارد. فرض کنید u یکی از اعضای پایهٔ متعارف $\mathbb{R}^n$ باشد، $u = e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ که درایهٔ ۱ در مکان jـ ام n تایی است. در این صورت به جای $D_{e_i}f(a)$ برای تابع $y = f(x)$، معمولاً یکی از نمادهای زیر به‌کار می‌رود:

$$\frac{\partial y}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f}{\partial x_j}(a), f_{x_j}(a), D_j f(a), D_{x_j} f(a)$$

و $D_{e_j}f(a)$ مشتق پاره‌ای (یا مشتق نسبی، یا مشتق جزیی) تابع f نسبت به x_j در نقطهٔ a خوانده می‌شود. به عبارت تعریف کنندهٔ مشتق پاره‌ای توجه کنید:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{h\to ۰} \frac{f(a_۱,\dots,a_{j-۱},a_j+h,a_{j+۱},\dots,a_n) - f(a_۱,\dots,a_n)}{h} \qquad (۳)$$

ملاحظه کنید که این در واقع عمل مشتق‌گیری نسبت به متغیر x_j است وقتی سایر متغیرها یعنی مقدار $x_۱,\dots,x_{j-۱},x_{j+۱},\dots,x_n$، برابر ثابت‌های به ترتیب $a_۱,\dots,a_{j-۱},a_{j+۱},\dots,a_n$ نگاه داشته شود. بنابراین محاسبه $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ بسیار ساده است، کافی است متغیرهای غیر از x_j را ثابت فرض کرده از قوانین مشتق‌گیری یک متغیری برای محاسبهٔ مشتق نسبت به متغیر x_j استفاده کنیم.

مثال ۱. تابع $f:\mathbb{R}^۳ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت $f(x,y,z) = x^۲y - z^۳$ تعریف شده است. مشتق‌های پاره‌ای f را نسبت به x، y و z در نقطهٔ دلخواه (x,y,z) محاسبه کنید. داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ۲xy \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^۲ \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -۳z^۲$$

مثال ۲. تابع $f:\mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^۲y}{x^۲+y^۲} & (x,y)\neq(۰,۰) \\ ۰ & (x,y) = (۰,۰) \end{cases}$$

فرمولی برای $\frac{\partial f}{\partial y}$ در نقطهٔ (x,y) پیدا کنید.

دو حالت $(x,y)=(۰,۰)$ و $(x,y)\neq(۰,۰)$ را جداگانه بررسی می‌کنیم. نخست برای $\frac{\partial f}{\partial y}(۰,۰)$، توجه کنید که برای $x=۰$ ثابت، داریم $f(۰,y)=۰$ برای هر x، پس $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,۰)=۰$ و در واقع $\frac{\partial f}{\partial x}(۰,y)=۰$ برای هر y. حال فرض کنید $(x,y)\neq(۰,۰)$. چون برای حد گیری فقط مقادیر دو متغیر نزدیک به این (x,y) مطرح هستند، می‌توانیم همواره فرض کنیم که فقط عبارت $\frac{x^۲y}{x^۲+y^۲}$ مورد

استفاده است و از این عبارت نسبت به y مشتق بگیریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^2(x^2+y^2)-2y(x^2y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

مثال ۳. طبق (۲)، اگر برد تابع، $\mathbb{R}^m$ باشد، مشتق‌های پاره‌ای تابع مؤلفه به مؤلفه محاسبه می‌شوند. به عنوان مثال فرض کنید $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ به صورت زیر داده شده است:

$$f(x,y,z)=(xyz^2,2y-z)$$

در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=(yz^2,0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=(xz^2,2)\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=(2xyz,-1)\end{aligned}$$

یادداشت. در آنچه گذشت عبارت (۱) را به عنوان مشتق سویی، فقط برای n تایی‌های واحد u مطرح کردیم، ولی می‌توان این عبارت را برای هر n تایی v نوشت و حاصل، مشتق f نسبت به v در نقطهٔ a خوانده می‌شود. نخست اگر $v\neq 0$، می‌نویسیم $v=|v|u_v$ که در اینجا $u_v=\frac{v}{|v|}$ بردار واحد در جهت v است. داریم:

$$\begin{aligned}D_vf(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+hv)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+(h|v|)u_v)-f(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}|v|\frac{f(a+(h|v|)u_v)-f(a)}{h|v|}\end{aligned}\qquad (4)$$

اگر $h|v|$ را به k نمایش دهیم، چون $|v|$ ثابت و ناصفر است، $h \to 0$ معادل $k \to 0$ است، پس:

$$
\begin{aligned}
D_v f(a) &= |v| \lim_{k \to 0} \frac{f(a+ku_v) - f(a)}{k} \\
&= |v| D_{u_v} f(a)
\end{aligned}
$$

برای $v = \underline{0}$، تعریف می‌کنیم $D_v f(a) = \underline{0}$، که با این رابطه سازگار است و به هر حال صورت کسر طرف راست (۴) همواره صفر است که بنابراین حد آن نیز صفر خواهد شد.

پس مشتق f نسبت به v در نقطهٔ a، $|v|$ برابر مشتق سویی f در جهت u_v در نقطهٔ a است. مطلب را می‌توان اینگونه تعبیر کرد: اگر متحرکی از نقطهٔ a با سرعت ثابت $|v|$ در جهت u_v در دامنه حرکت کند، $D_v f(a)$ آهنگ تغییر لحظه‌ای f در نقطهٔ a در جهت حرکت است، که متناسب با مقدار $|v|$ می‌باشد.